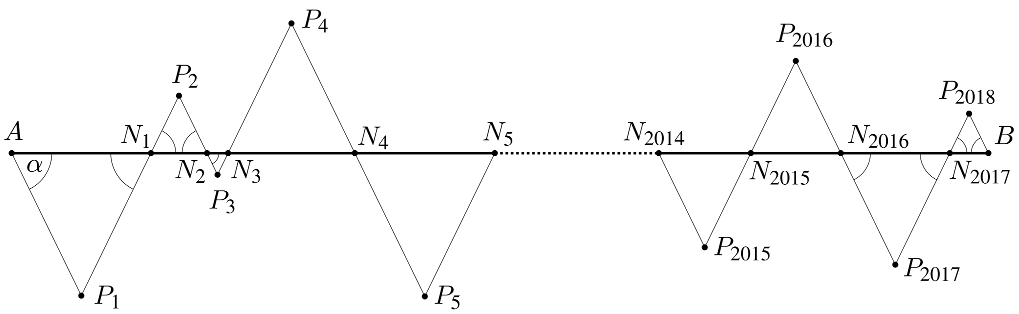
Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2016/2017-es tanév
1. forduló
Haladók III. kategória

Megoldások és javítási útmutató

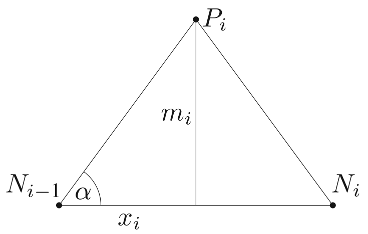
1. Adott egy AB szakasz, s rajta tetszőlegesen 2017 pont. A szakaszra az ábrán látható módon adott α szögű egyenlőszárú háromszögeket rajzolunk.



$a)$ Hogyan vegyük fel a pontokat, hogy ezen háromszögek területeinek összege minimális legyen?

$b)$ Hogyan vegyük fel a pontokat, hogy az $AP_1N_1P_2N_2\dots P_{2018}B$ töröttvonal hossza a legnagyobb legyen?

Megoldás.



$a)$ Legyen $A = N_0$ és $B = N_{2018}$. Írjuk fel egy kis háromszög területét.

A háromszög magassága: $m_i = x_i \cdot \operatorname{tg}\alpha$, így a területe $T_{N_{i-1}N_iP_i} = x_i^2 \cdot \operatorname{tg}\alpha$, 1 pont

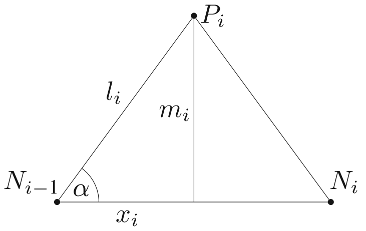
$$T = \sum_{i=1}^{2018} T_{N_{i-1}N_iP_i} = \sum_{i=1}^{2018} x_i^2 \cdot \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\alpha \cdot \sum_{i=1}^{2018} x_i^2 = \qquad \text{1 pont}$$

A négyzetes és a számtani közép közötti egyenlőtlenség alapján:

$$= 2018 \operatorname{tg}\alpha \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{2018} \frac{x_i^2}{2018}} \right)^2 \geqq 2018 \operatorname{tg}\alpha \left(\frac{\sum x_i}{2018} \right)^2 = \operatorname{tg}\alpha \cdot \frac{AB^2}{2018} = \text{állandó}. \qquad \text{2 pont}$$

Az egyenlőség pontosan akkor áll fenn, amikor a pontok egyenletesen helyezkednek el. 1 pont

$b)$ Egy tetszőleges háromszög két szára:



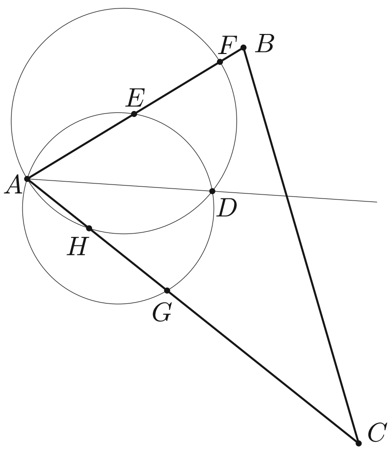
$$2l_i = \frac{2x_i}{\cos\alpha},$$

$$S = 2\cdot\sum_{i=1}^{2018} l_i = 2\cdot\sum_{i=1}^{2018}\frac{x_i}{\cos\alpha} = \frac{2}{\cos\alpha}\cdot\sum_{i=1}^{2018} x_i =$$

$$= \frac{2AB}{\cos\alpha} = \text{áll.}$$ 1 pont

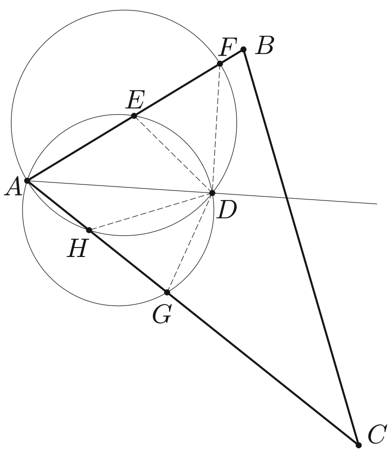
A töröttvonal hossza állandó a pontok helyének megválasztásától függetlenül. 1 pont

Összesen: 7 pont



2. A $BAC\sphericalangle$ belső szögfelezőjének egyik – A-tól különböző – pontja D. Bizonyítsuk be, hogy ha két kör közös metszéspontja A és D, akkor a $BAC\sphericalangle$ szög szárainak (AB és AC félegyenesek) a két kör közé eső szakasza ugyanolyan hosszú! Diszkutáljuk a feladatot!

Megoldás.



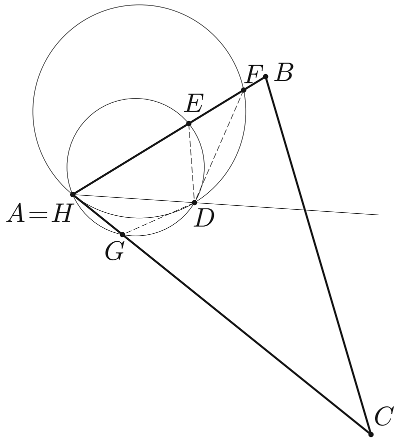
Először vizsgáljuk azt az esetet, amikor A nem esik egybe a kérdéses szakaszok egyik végpontjával (azaz E-vel, F-fel, H-val vagy G-vel).

A feltételből tudjuk, hogy $BAD\sphericalangle = DAC\sphericalangle$.

Azonos nagyságú kerületi szögekhez azonos hosszúságú húrok tartoznak, így $DE = DG$, illetve a másik körön $FD = DH$. 1 pont

Az $EDG\sphericalangle = FDH\sphericalangle$, mert mindkettő szög az $AEDG$, illetve az $AFDH$ húrnégyszögben az $EAH\sphericalangle$-gel szemközti szöge. 1 pont

Mivel $EDH\sphericalangle$ közös, ezért $EDF\sphericalangle = HDG\sphericalangle$. Tehát a $DFE\triangle$ és a $DGH\triangle$ egybevágó, mivel két oldalukban és a közbezárt szögükben megegyeznek. Így $EF = GH$. 1 pont



Ha A egybeesik H, G, E vagy F valamelyikével, úgy a fenti bizonyításban szereplő húrnégyszögek egyike nem alakul ki.

Vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor $A = H$.
A többi analóg ezzel.

Ebben az esetben AG az A, D, F pontokat tartalmazó kör érintője lesz. Így az érintőszárú és kerületi szögek tételéből $GAD\sphericalangle = AFD\sphericalangle$.

Így AFB háromszög egyenlőszárú, mivel két szöge megegyezik, azaz $AD = DF$. 1 pont

Hasonlóan az előzőekhez, a $BAD\sphericalangle = DAC\sphericalangle$ feltételből $DE = DG$.

$AEDG$ húrnégyszög $AED\sphericalangle$ kiegészítő szöge pedig megegyezik $AGD\sphericalangle$-gel. 1 pont

Így ebben az esetben is megkapjuk, hogy a $DFE\triangle$ és a $DGA\triangle$ egybevágó, mivel szögeikben és 2 oldalukban is megegyeznek. Így $EF = GH$. 1 pont

Abban az esetben, amikor $E = H = A$ (ekkor mindkét szögszár érintője 1-1 körnek), a megfelelő szakaszok egyenlősége szimmetria miatt nyilvánvaló. 1 pont

Összesen: 7 pont

3. 10 egymást követő egész szám közül magányosnak nevezzük azokat, amelyek relatív prímek az összes többihez. Igazoljuk, hogy 10 egymást követő egész között mindig lesz legalább egy, ami magányos!

$b)$ Mutassunk példát 10 szomszédos egészre, amelyek között pontosan egy magányos szám van!

Megoldás. Legyen x és y két egész szám, amelyek közös osztója d. Ekkor $d \mid x - y$. Tehát, ha a 10 egymást követő szám közül kettő nem relatív prím, akkor biztosan közös osztójuk a 2; 3; 5 és 7 számok valamelyike. 2 pont

A számok között pontosan öt páratlan szám van. Ezek közül legfeljebb kettő osztható 3-mal, és legfeljebb egy-egy osztható 5-tel, illetve 7-tel. Azaz legfeljebb $2 + 1 + 1$ páratlan szám lehet osztható a 3; 5; 7 számok valamelyikével. Így biztosan marad olyan szám, ami nem osztható a fenti számok egyikével sem. Ez a szám biztosan magányos lesz. 2 pont

$b)$ Az a célunk, hogy a 10 szám közül 9 osztható legyen a 2; 3; 5 és 7 számok valamelyikével, illetve ezek a prímek legalább két számot osszanak a 10 közül.

Próbálgatással találhatunk, olyan oszthatósági feltételeket, amelyek ezt teljesítik. Ezt az alábbi táblázatban foglaljuk össze:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	
2 |		2 |		2 |		2 |		2 |		
3 |			3 |			3 |			3 |	
5 |					5 |					
	7 |							7 |		2 pont

Tehát olyan a_1-et keresünk, amely osztható 30-cal és a 7-es maradéka 6. Könnyen ellenőrizhető, hogy a 90 egy jó választás.

Tehát az alábbi 10 szám olyan lesz, amelyben csak egy magányos szám van:

90; 91; 92; 93; 94; 95; 96; **97**; 98; 99. 1 pont

Összesen: 7 pont

Megjegyzés: Bármilyen helyes példa megadása (megfelelő indoklással együtt) 3 pontot ér.

4. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a valós számpárok halmazán:

$$\begin{cases} \left(x-\sqrt{x^2+1}\right)\left(y-\sqrt{y^2+1}\right)=1, \\ (x^2+y-2)(y^2+x-2)=-2. \end{cases}$$

Megoldás. Először megmutatjuk, hogy az első $\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)\left(y-\sqrt{y^2+1}\right)=1$ egyenletből következik, hogy $y=-x$.

(A fenti észrevételért – bizonyítás nélkül – : 1 pont)

Ehhez az első egyenlet baloldalának mindkét tényezőjét szorozzuk (-1)-gyel:

$$(1') \qquad \left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{y^2+1}-y\right)=1.$$

Itt nyilván $y=-x$ esetén teljesül az egyenlet, megmutatjuk, hogy más esetben nem. Ezt úgy mutatjuk meg, hogy igazoljuk, hogy a $b(x)=\sqrt{x^2+1}-x$ függvény szigorúan monoton csökkenő. Ebben az esetben nyilván legfeljebb egyetlen x esetén vehet fel bármely értéket, így ha pl. y-t paraméterként rögzítjük, akkor az $(1')$ paraméteres egyenletnek legfeljebb egy megoldása lehet, de egy megoldás (jelesül $x=-y$) mindig van is.

(A szigorú monotonitás észleléséért: 1 pont)

A szigorú monoton csökkenés pontosan azt jelenti, hogy ha $x_1<x_2 \to b(x_1)>b(x_2)$.

Legyen először $x_1<x_2 \leqq 0$! Ekkor mivel $\sqrt{x_1^2+1}>\sqrt{x_2^2+1}$, és $(-x_1)>(-x_2)$ az x_1, x_2 választása miatt, ezért ekkor a csökkenés triviális.

Legyen most $0 \leqq x_1 < x_2$! Átalakítva kissé $b(x)$-t (a szokásos $\sqrt{x^2+1}+x$ konjugált-bővítéssel):

$$b(x) = \frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}.$$

Most a nevezőt vizsgálva adódik, hogy $\sqrt{x_1^2+1} < \sqrt{x_2^2+1}$, és $x_1 < x_2$ miatt a nevező szigorúan növekvő, és pozitív, de akkor az egész tört szigorúan csökkenő.

És végül (mivel a 0-t mindkét esetben felvehette x_1, illetve x_2) adódik, hogy bármely $x_1 < x_2$ esetén $b(x_1) > b(x_2)$. Ezzel a szigorú monoton csökkenést beláttuk.

(A szigorú monotonitás bizonyításáért: 2 pont)

Mivel $y = (-x)$ a második egyenlet átírható a következő alakba:

$$(2') \qquad (x^2 - x - 2)(x^2 + x - 2) = -2.$$

Innen adódik:

$$(2') \qquad \begin{aligned}(x^2 - x - 2)(x^2 + x - 2) &= \left((x^2-2)-x\right)\left((x^2-2)+x\right) = \\ &= (x^2-2)^2 - x^2 = x^4 - 5x^2 + 4 = -2.\end{aligned}$$

Innen: $0 = x^4 - 5x^2 + 6 = (x^2-2)(x^2-3)$. Vagyis x lehetséges értékei: $x_1 = \sqrt{2}$; $x_2 = -\sqrt{2}$; $x_3 = \sqrt{3}$; $x_4 = -\sqrt{3}$.

(A második egyenlet megoldásáért: 2 pont)

Azaz a négy lehetséges $(x; y)$ megoldás:

$$\left(-\sqrt{3}; \sqrt{3}\right); \quad \left(\sqrt{3}; -\sqrt{3}\right); \quad \left(-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right); \quad \left(\sqrt{2}; -\sqrt{2}\right).$$

(A négy megoldáspár felsorolásáért: 1 pont)

Összesen: 7 pont

5. Ramszesznek, a fáraó írnokának van néhány egyforma nagyságú búzalepénye. Vallási előírásokból, ha egy lepényt felvágnak, akkor legfeljebb hét darab egyforma nagyságú részre kell vágni, és az egyszer már több részre osztott lepény darabjai tovább már nem oszthatóak.

Igazoljuk, hogy ha Ramszesznek legalább 18 egyforma lepénye van, akkor szét tudja osztani olyan adagokra, hogy az egyiptomi holdhónap mind a 28 napjára egyforma mennyiségű lepény jusson!

Megoldás. Azt fogjuk megmutatni, hogy elegendő, ha egy lepényt csupán négy, vagy hét részre vághatunk. Ilyen osztásokkal is igazságosan szétosztható 28 egyenlő részre n darab lepény minden $n > 17$ szám esetén. 1 pont

Először is megmutatjuk, hogy bármely $n > 17$ egész előáll $n = 4a + 7b$ $(a, b \in \mathbb{N})$ alakban. (*Ez az ismert Frobenius-féle pénzosztási probléma speciális esete.*)

– Ha $n = 18 = 4 \cdot 1 + 7 \cdot 2 \;\to\; a = 1;\ b = 2.$

– Ha $n = 19 = 4 \cdot 3 + 7 \cdot 1 \;\to\; a = 3;\ b = 1.$

– Ha $n = 20 = 4 \cdot 5 + 7 \cdot 0 \;\to\; a = 5;\ b = 0.$

– Ha $n = 21 = 4 \cdot 0 + 7 \cdot 3 \;\to\; a = 0;\ b = 3.$

Innentől minden további szám előáll az előzőekhez „néhány” 4-est adva.

(*Pl.* $n = 43$ *esetén* $43 - 19 = 24 = 4 \cdot 6 \;\to\; 43 = 4 \cdot (3 + 6) + 7 \cdot 1 \;\to\; a = 9;\ b = 1.$)

Vagyis valóban minden $n > 17$ egész előáll $n = 4a + 7b$ $(a, b \in \mathbb{N})$ alakban. 3 pont

Ezek után bármely $n > 17$ mennyiségű lepény esetén a kívánt felosztás 28 egyenlő részre könnyen megtehető a következő módon:

Írjuk fel n-t $n = 4 \cdot a + 7 \cdot b$ $(a, b \in \mathbb{N})$ alakban.

Ezután $4 \cdot a$ lepény mindegyikét osszuk fel egyenként 7-7 (összesen $7 \cdot 4 \cdot a = 28 \cdot a$) egyenlő darabra.

Majd $7 \cdot b$ lepény mindegyikét osszuk fel egyenként 4-4 (összesen $4 \cdot 7 \cdot b = 28 \cdot b$) egyenlő darabra. Minden napra a darab 7-ed, és b darab 4-ed lepényt félretéve mind a 28 napra azonos, vagyis $\frac{a}{7} + \frac{b}{4}$ mennyiségű lepény jut.

Ezzel a felosztást megvalósítottuk. 3 pont

Összesen: 7 pont