Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2016/2017-es tanév
2. forduló
Haladók II. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Igazoljuk, hogy az $x!(x+4)! = y^2$ egyenletnek nincs megoldása, ha x és y pozitív egész számok!

Megoldás. Végezzük el az alábbi átalakítást:

$$(x!)^2(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) = y^2.$$ 1 pont

Mivel a bal oldal első tényezője és a jobb oldal négyzetszám, ezért az

$$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$$

szorzatnak is négyzetszámnak kell lennie. 2 pont

Szorozzuk az első tényezőt a negyedikkel és a két középsőt egymással, ekkor a következőt kapjuk: $\left(x^2+5x+4\right)\left(x^2+5x+6\right)$. 2 pont

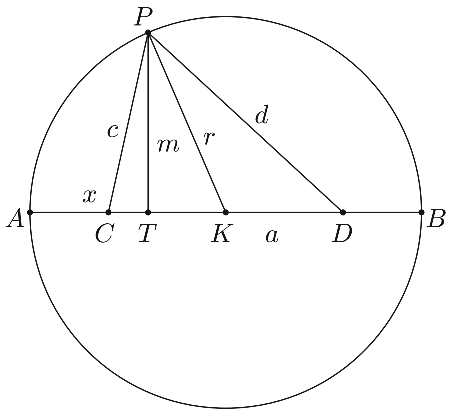
Jelöljük x^2+5x+4-et n-nel, ekkor a két tényező szorzata $n(n+2) = n^2+2n$. 1 pont

Ez nem lehet négyzetszám, hiszen két egymást követő négyzetszám: n^2 és $(n+1)^2$ közé esik $n > 0$ miatt. 1 pont

Összesen: 7 pont

2. Egy kör AB átmérőjén úgy vesszük fel a C és D pontokat, hogy azok a kör középpontjától egyenlő távolságra legyenek. Bizonyítsuk be, hogy ha P a körvonal tetszőleges pontja, akkor a $CP^2 + DP^2$ állandó.

Megoldás.



Használjuk az ábra jelöléseit, ahol T a P pont AB szakaszra eső merőleges vetülete és x jelöli az AT távolságot! Legyen továbbá $KC = KD = a$.

Szimmetria okokból elegendő, azt vizsgálnunk, ha a T pont az AK szakaszra esik. 1 pont

A KTP, CTP és DTP derékszögű háromszögekben felírjuk Pitagorasz tételét:

$$m^2 + (r-x)^2 = r^2, \tag{1}$$
$$m^2 + \big(a - (r-x)\big)^2 = c^2, \tag{2}$$
$$m^2 + \big(a + (r-x)\big)^2 = d^2. \tag{3}$$

1 pont

Az egyenleteket átalakítva:

$$m^2 + x^2 - 2rx = 0, \tag{1}$$
$$m^2 + x^2 - 2rx = c^2 - a^2 - r^2 + 2ar - 2ax, \tag{2}$$
$$m^2 + x^2 - 2rx = d^2 - a^2 - r^2 - 2ar + 2ax. \tag{3}$$

1 pont

Így az alábbi egyenletrendszerhez jutunk:

$$c^2 - a^2 - r^2 + 2ar - 2ax = 0, \tag{2}$$
$$d^2 - a^2 - r^2 - 2ar + 2ax = 0. \tag{3}$$

1 pont

Az egyenleteket összeadva:

$$c^2 + d^2 - 2a^2 - 2r^2 = 0,$$
$$c^2 + d^2 = 2a^2 + 2r^2.$$

A kívánt állításhoz jutunk. 2 pont

Amennyiben a T pont a CK szakaszon kívülre esik, akkor (2) a következő alakra módosul:

$$m^2 + \big((r-x) - a\big)^2 = c^2.$$

Mivel ez ekvivalens az eredetivel, ezért ugyanazt az eredményt kapjuk. 1 pont

---

Összesen: 7 pont

Megjegyzés: Amennyiben a versenyző felhasználja az alábbi tétel: Bármely háromszögben igaz az a oldalhoz tartozó súlyvonalra az alábbi összefüggés $b^2 + c^2 = 2s_a^2 + \frac{a^2}{2}$, de a tételt nem bizonyítja, legfeljebb 2 pontot kaphat. (A tétel sem a központi tantervekben, sem *a függvénytáblázatban nem szerepel.) Amennyiben bizonyítja is a tételt, a maradék 5 pont az útmutató pontszámainak megfelelően bontható.*

3. Legyen a, b és c egy háromszög három oldalának hossza. Bizonyítsuk be, hogy

$$3(ab+ac+bc) \leqq (a+b+c)^2 < 4(ab+ac+bc).$$

Mikor áll fenn egyenlőség?

Megoldás. A háromszög oldalaira vonatkozó egyenlőtlenség alapján $|a-b| < c$, $|a-c| < b$ és $|b-c| < a$. 1 pont

Mivel az egyenlőtlenségek mindegyik oldala nem negatív, ezért négyzetre emelhetőek és összeadhatóak:

$$a^2-2ab+b^2+a^2-2ac+c^2+b^2-2bc+c^2 < c^2+b^2+a^2.$$ 1 pont

Mindkét oldalból vonjunk le $a^2+b^2+c^2$-t és adjunk hozzá $4(ab+ac+bc)$-t. 1 pont

Ezzel az $\left(a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc\right) < 4(ab+ac+bc)$ egyenlőtlenséghez jutunk, ami éppen megfelel a bizonyítandó állítás jobb oldalának. 1 pont

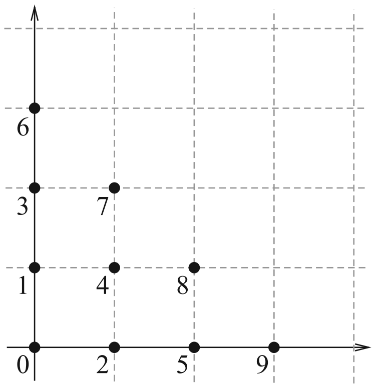
A baloldali egyenlőtlenség bizonyításához használjuk az $(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2 \geqq 0$ mindig teljesülő egyenlőtlenséget. 1 pont

A négyzetre emelést elvégezve, a negatív tagokat a másik oldalra rendezve és kettővel osztva adjunk mindkét oldalhoz $2(ab+ac+bc)$-t, így a bizonyítandó egyenlőtlenséghez jutunk. 1 pont

A bizonyításból látszik, hogy egyenlőség az $a=b=c$ esetben (azaz szabályos háromszög esetén) van. 1 pont

Összesen: 7 pont

4. A derékszögű koordináta-rendszer I. negyedének rácspontjaiba az ábrán látható módon átlósan beírjuk az egymást követő természetes számokat. (A 0 az origóba kerül.)



a) Milyen koordinátájú pontban van a 2017?

b) Milyen szám szerepel a $P(54; 72)$ koordinátájú pontban?

Megoldás. a) Mivel az egyes átlókban lévő pontok száma az egymást követő természetes számoknak felel meg, 1 pont

az y tengely $(0; n)$ koordinátájú pontjába írt számot a 0-tól n-ig vett számok összege adja meg. 1 pont

Annak a ferde sornak, amelyen a 2017 is rajta van, az y tengelyen lévő pontjának n koordinátájára igaznak kell lenni az $\frac{n(n+1)}{2} \leqq 2017$, a következő sorra pedig az

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} > 2017$$

egyenlőtlenségnek. 1 pont

Az első egyenlőtlenségből $n \leqq 63{,}01$, a másodikból $n > 62{,}01$. Így $n = 63$ lehet csak. 1 pont

1-től 63-ig a számok összege 2016. Így a 2017 koordinátája: $(1; 62)$ 1 pont

b) Az adott pont a $(0; 72 + 54 = 126)$ koordinátájú pontból induló ferde soron van. Az erre a pontra írt szám 126-ig a számok összege, azaz 8001. 1 pont

Innen még 54 lépést kell megtenni lefelé az adott pontig, így erre a pontra írt szám a

$$8001 + 54 = 8055.$$ 1 pont

Összesen: 7 pont