Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2016/2017-es tanév
első (iskolai) forduló
Haladók – II. kategória

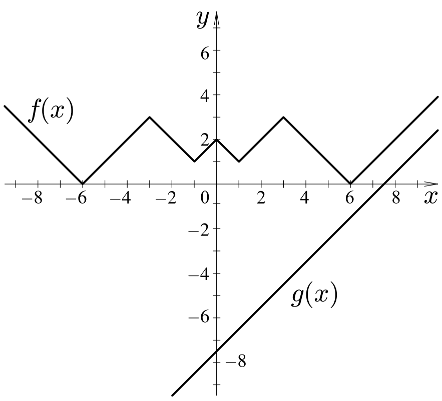
Megoldások és javítási útmutató

1. A k valós paraméter értékétől függően hány valós megoldása van a következő egyenletnek?

$$\Big|\big|\big||x|-1\big|-2\big|-3\Big| = x-k.$$

Megoldás. Grafikus megoldás:

A baloldali függvény ábrázolása: $f(x)=\Big|\big|\big||x|-1\big|-2\big|-3\Big|$. 2 pont



A jobboldali függvényt, $g(x)=x-k$, az előző ábrára illesztve és önmagával párhuzamosan eltolva, a két grafikon metszéspontjainak száma adja az egyenlet megoldásainak számát. 1 pont

Ha $k=-6$ vagy $k=-2$ vagy $k=0$ vagy $k=6$, akkor a $g(x)=x-k$ egyenese illeszkedik az $f(x)$ függvény egy-egy szakaszára, ezért ezeknél a k értékeknél az egyenletnek végtelen sok megoldása van. 1 pont

Ha $k\in\,]-\infty;-6[$ vagy $k\in\,]-6;-2[$ vagy $k\in$ $\in\,]-2;0[$ vagy $k\in\,]0;6[$, 1 pont

akkor az egyenletnek pontosan egy megoldása van. 1 pont

Ha $k\in\,]6;\infty[$, akkor az egyenletnek nincs megoldása. 1 pont

Összesen: 7 pont

2. Határozzuk meg az összes olyan négyjegyű négyzetszámot, amelynek számjegyeit eggyel megnövelve a kapott négyjegyű szám szintén négyzetszám lesz!

Megoldás. Ebben az esetben a két szám különbsége 1111, tehát az $x^2 - y^2 = 1111$ egyenletet kell megoldanunk, ahol x és y pozitív egész számok. 2 pont

Ezt átalakítva:

$$(x-y)\cdot(x+y) = 1111.$$ 1 pont

Mivel a prímtényezős felbontás: $1111 = 11\cdot 101$, ezért az 1111-nek négy pozitív osztója van, 1, 11, 101, 1111. Így a lehetőségek: 1 pont

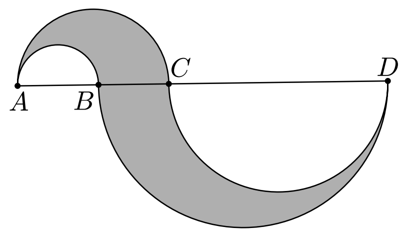
$\left.\begin{aligned} x-y&=1\\ x+y&=1111\end{aligned}\right\}$ ebből $x = 556$, $y = 555$. Ez nem megoldás. 1 pont

$\left.\begin{aligned} x-y&=11\\ x+y&=101\end{aligned}\right\}$ ebből $x = 56$, $y = 45$. Ez jó megoldás. 1 pont

Tehát a keresett négyjegyű szám a 2025. 1 pont

Összesen: 7 pont

3. Az AB, AC, BD és CD szakaszok, mint átmérők felé félköríveket rajzoltunk az *ábrán* látható módon. Fejezzük ki a színezett rész területét a és b segítségével, ha $AD = a$ és $BC = b$!



Megoldás. Jelölje r_{BD} a BD, r_{CD} a CD, r_{AC} az AC, e_{AB} az AB átmérőkhöz tartozó sugarat.

Ekkor a keresett terület:

$$T = \frac{r_{BD}^2\pi}{2} - \frac{r_{CD}^2\pi}{2} + \frac{r_{AC}^2\pi}{2} - \frac{r_{AB}^2\pi}{2}.$$ 2 pont

Alakítsuk át a területet, mivel a sugár az átmérő fele, és a közös π-t és a nevezőben lévő 2-t kiemelhetjük:

$$T = \frac{\pi}{8}\left(BD^2 - CD^2 + AC^2 - AB^2\right).$$ 1 pont

Legyen $AB = x$. Ekkor

$$T = \frac{\pi}{8}\left((a-x)^2 - (a-b-x)^2 + (x+b)^2 - x^2\right).$$ 1 pont

Végezzük el a négyzetre emeléseket, és vonjunk össze; vagy az $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ azonosságot felhasználva hozzuk egyszerűbb alakra a kifejezést:

$$T = \frac{\pi}{8}\Big(\big(a - x - (a - b - x)\big)\big(a - x + (a - b - x)\big) + (x + b - x)(x + b + x)\Big),$$

$$T = \frac{\pi}{8}\big(b(2a - 2x - b) + b(2x + b)\big),$$

$$T = \frac{\pi}{8}(2ab),$$ 2 pont

azaz a keresett terület $T = \dfrac{ab\pi}{4}$. 1 pont

Összesen: 7 pont

4. El lehet-e helyezni egy asztalon egy síkban (a pénzérmék egymásra helyezése nélkül)

a) 2016

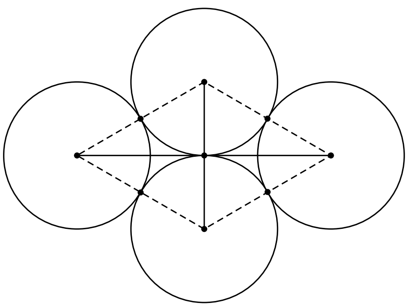
b) 2017

egyforma, kör alakú pénzérmét úgy, hogy mindegyik pénzérme három másik pénzérmét érintsen? Ha el lehet helyezni, akkor egy lehetséges elhelyezést kérünk indoklással; ha nem lehet, akkor indoklást, hogy miért nem!

Megoldás. Először vizsgáljuk a *b*) kérdést. Ha 2017 darab pénzérme mindegyike három másik érmét érint, akkor a $2017 \cdot 3 = 6051$ szorzat eredménye páratlan. Ez azonban lehetetlen, mivel itt minden érintési pontot kétszer számoltunk meg. 1 pont

Minden érintési pontot kétszer számolunk meg, így nem lehet páratlan az összeg. 1 pont

Tehát 2017 darab pénzérmét nem lehet elhelyezni egy síkban. 1 pont



a) A $2016 \cdot 3 = 6048$ érintési pont esetén a szorzat páros, így most nem áll fent az előző eset. Ekkor valóban elhelyezhetőek a pénzérmék, például az alábbi módon. Képezzünk négy pénzérméből az ábra szerinti alakzatot. Ekkor a belső érmék 3-3 másik pénzérmét érintenek. 2 pont

Majd mivel $2016 : 4 = 504$, ezért 504 darab ilyen négyest helyezzünk el körben, mintha a két szélső körlap középpontjait összekötő szakasz egy 504 szög egy oldala lenne. 1 pont

Így az első és utolsó pénzérme is három másik pénzérmét fog érinteni. 1 pont

Összesen: 7 pont

Megjegyzés: Bármely más, de helyes konstrukció mutatása és a konstrukció helyességének magyarázata is 4 pont. Ha nincsen magyarázat a konstrukció mellett, akkor arra legfeljebb 2 pont adható.

5. Tekintsük a következő 99 darab egyenletből álló 99 változós egyenletrendszert!

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 1, \\ a_2 + a_3 = 2, \\ a_3 + a_4 = 3, \\ \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{98} + a_{99} = 98, \\ a_{99} + a_1 = 99. \end{cases}$$

Mennyi a következő összeg pontos értéke?

$$S = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 \pm \ldots + a_{97} - a_{98} + a_{99}.$$

Megoldás. Vonjuk ki rendre a párosadik sorszámú egyenletekből az előző egyenleteket!

A második egyenletből kivonva az elsőt adódik:

$$a_3 - a_1 = 1 \;\rightarrow\; a_3 = a_1 + 1.$$

A negyedik egyenletből kivonva a harmadikat adódik:

$$a_5 - a_3 = 1 \;\rightarrow\; a_5 = a_3 + 1 = a_1 + 2.$$

$$\vdots$$

A 98-adik egyenletből kivonva a 97-ediket:

$$a_{99} - a_{97} = 1 \;\rightarrow\; a_{99} = a_{97} + 1 = a_{95} + 2 = \ldots = a_3 + 48 = a_1 + 49.$$

Majd hasonlóan vonjuk ki rendre a páratlanadik sorszámú egyenletekből az előző egyenleteket!

A harmadik egyenletből kivonva a másodikat adódik:

$$a_4 - a_2 = 1 \;\rightarrow\; a_4 = a_2 + 1.$$

Az ötödik egyenletből kivonva a negyediket adódik:

$$a_6 - a_4 = 1 \;\rightarrow\; a_6 = a_4 + 1 = a_2 + 2.$$

$$\vdots$$

A 97-edik egyenletből kivonva a 96-odikat:

$$a_{98} - a_{96} = 1 \;\rightarrow\; a_{98} = a_{96} + 1 = a_{94} + 2 = \ldots = a_4 + 47 = a_2 + 48.$$

Végül a 99-edik egyenletből kivonva a 98-adikat:

$$a_1 - a_{98} = 1 \;\rightarrow\; a_1 = a_{98} + 1.$$

Innen adódik (az előző eredményeket összekapcsolva), hogy az a_i-k 99 egymást követő szám: 3 pont

$$a_{99} = a_{97} + 1 = a_{95} + 2 = \ldots = a_3 + 48 = a_1 + 49 = a_{98} + 50 = a_{96} + 51 =$$
$$= a_{94} + 52 = \ldots = a_4 + 97 = a_2 + 98.$$

Kiszámoljuk a_1, a_{99} pontos értékét. $a_{99} + a_1 = 99$, és $a_{99} = a_1 + 49 \;\rightarrow\; a_1 = 25$, $a_{99} = 74$.

Innen a többi a_i is adódik: -24-től 74-ig az egész számok. 2 pont

(Bármilyen módon a helyesen megoldott egyenletrendszer (akár megsejtve a megoldást, és leellenőrizve) 5 pontot érjen!)

A kérdéses összeg sokféleképpen megadható, például:

$$S = (a_{99} - a_{98}) + (a_{97} - a_{96}) + \ldots + (a_3 - a_2) + a_1 = 50 + 50 + \ldots + 50 + a_1 =$$
$$= 49 \cdot 50 + 25 = 50^2 - 25 = 2475.$$

(Itt azt használtuk ki, hogy az egy zárójelben lévő két szám között az egyenletrendszer megoldása alapján mindig 50 a különbség.) 2 pont.

Vagyis a kérdéses S összeg értéke: $S = 2475$.

Összesen: 7 pont