Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2016/2017-es tanév
2. forduló
Haladók I. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Melyek azok az $(a; b)$ egész számpárok, amelyekre teljesül az alábbi egyenlőtlenség:

$$a^2 + 7b^2 \leqq 4ab + 6b?$$

Megoldás. Rendezzünk nullára, és alakítsunk teljes négyzetté:

$$(a - 2b)^2 + 3b^2 - 6b \leqq 0.$$ 1 pont

Adjunk hozzá hármat és alakítsunk teljes négyzetté:

$$(a - 2b)^2 + 3(b - 1)^2 \leqq 3.$$ 1 pont

Mivel $(a - 2b)^2$, és $(b - 1)^2$ négyzetszámok, ezért $(b - 1)^2 \in \{0, 1\}$. 1 pont

1. Ha $b - 1 = -1$, $b = 0$, akkor $a - 2b = 0$, azaz $a = 0$. 1 pont

2. Ha $b - 1 = 0$, $b = 1$, akkor $a - 2b = -1$ vagy $a - 2b = 0$ vagy $a - 2b = 1$ lehetséges, ekkor a-ra az alábbi értékeket kapjuk: $a = 1$, $a = 2$, $a = 3$. 1 pont

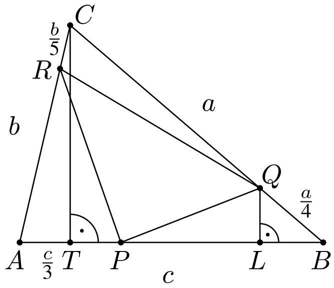
3. Ha $b - 1 = 1$, $b = 2$, akkor $a - 2b = 0$, azaz $a = 4$. 1 pont

Tehát a megoldások: $(0; 0)$; $(1; 1)$; $(2; 1)$; $(3; 1)$; $(4; 2)$. 1 pont

---

Összesen: 7 pont

2. Adott az ABC háromszög. Legyen P az AB oldal harmadoló pontja, Q a BC oldal negyedelő pontja, valamint R a CA oldal ötödölő pontja az ábrán látható módon. Határozzuk meg a PQR és az ABC háromszögek területének arányát.



Megoldás. A keresett területet (T_{PQR}) az eredeti háromszög területéből a PBQ, QCR és az RAP háromszögek területének kivonásával kaphatjuk meg. 1 pont

A PBC háromszög területe az eredeti ABC háromszög területének a $2/3$-a, mivel azonos magasságúak és az alapok aránya $2/3 : 1$. 1 pont

QLB és CTB háromszögek hasonlóak, mert oldalaik párhuzamosak, a hasonlóság aránya $1 : 4$. 1 pont

A PBQ háromszög területe a PBC háromszög területének a negyede, mivel alapjaik azonosak, s magasságuk aránya $1 : 4$. 1 pont

Így a PBQ háromszög területe: $T_{PBQ} = T_{ABC} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}$. 1 pont

(Vagy egyszerűbben: $T_{PBQ} = \frac{\frac{2c}{3} \cdot \frac{m_c}{4}}{2} = \frac{1}{6} \frac{c \cdot m_c}{2} = \frac{1}{6} T_{ABC}$.)

A további háromszögek területe hasonlóan adódik.

$$T_{QCR} = T_{ABC} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5}, \quad T_{RAP} = T_{ABC} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{3}.$$ 1 pont

A keresett terület: $T_{PQR} = T_{ABC} \cdot \left(1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} - \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{3}\right) = T_{ABC} \cdot \frac{5}{12}$. 1 pont

Összesen: 7 pont

3. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}\,.$$

Megoldás. Az egyenlet mindkét oldalát megszorozzuk a $\sqrt{x+\sqrt{x}}$ kifejezéssel:

$$\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)^2-\sqrt{x-\sqrt{x}}\cdot\sqrt{x+\sqrt{x}}=\frac{3}{2}\sqrt{x}\,.$$ 1 pont

Nevezetes azonosság alkalmazása után:

$$x+\sqrt{x}-\sqrt{x^2-x}=\frac{3}{2}\sqrt{x}\,.$$ 1 pont

A kapott egyenletet elosztjuk $\sqrt{x}$-szel ($x=0$ nem lehetséges a tört nevezője miatt):

$$\sqrt{x}+1-\sqrt{x-1}=\frac{3}{2}.$$ 1 pont

Az átrendezés után kapott egyenlet $\left(\text{pl. } \sqrt{x}=\frac{1}{2}+\sqrt{x-1}\right)$ mindkét oldalát négyzetre emelve:

$$x=\frac{1}{4}+\sqrt{x-1}+x-1.$$ 1 pont

Újabb rendezés $\left(\frac{3}{4}=\sqrt{x-1}\right)$ és négyzetre emelés után: $\frac{9}{16}=x-1.$ 1 pont

Ebből: $x=\frac{25}{16}.$ 1 pont

A kapott megoldás eleget tesz a feladat feltételeinek. 1 pont

(Ha ellenőrzés helyett értelmezési tartomány és értékkészlet vizsgálatot végez, az utóbbi 1 pont akkor is adható.)

Összesen: 7 pont

4. Adott egy 8×8-as táblázat. Nevezzük főátlónak az $a_1 - h_8$ átlót. A főátló alatti mezőket 0-kal töltjük ki, míg a többi mezőbe pozitív egészeket írunk. A kitöltés után kiszámoljuk a sor-, illetve oszlopösszegeket. Lehetséges-e, hogy az $1, 2, 3, \ldots, 16$ számokat kapjuk eredményül (valamilyen sorrendben)?

b) Ha egy 7×7-es táblánk van, akkor lehetséges-e, hogy az $1, 2, 3, \ldots, 14$ számokat kapjuk eredményül (valamilyen sorrendben)?

8								
7								0
6							0	0
5						0	0	0
4					0	0	0	0
3				0	0	0	0	0
2			0	0	0	0	0	0
1		0	0	0	0	0	0	0
	a	b	c	d	e	f	g	h

Megoldás.

15	2	2	2	2	2	2	2	1
14	2	2	2	2	2	2	2	0
11	2	2	2	2	2	1	0	0
10	2	2	2	2	2	0	0	0
7	2	2	2	1	0	0	0	0
6	2	2	2	0	0	0	0	0
3	2	1	0	0	0	0	0	0
2	2	0	0	0	0	0	0	0
	16	**13**	**12**	**9**	**8**	**5**	**4**	**1**

Elérhető a kívánt kitöltés. Írjunk minden mezőbe 2-est. Majd a főátlóban álló kettesek közül minden másodikat cseréljünk le egyesekre. Könnyen ellenőrizhető, hogy ez egy megfelelő kitöltés. 3 pont

Megjegyzés: Bármilyen helyes kitöltés megadása 3 pontot ér.

b) A kívánt kitöltés nem valósítható meg. Indirekten fogunk bizonyítani, tegyük fel, hogy a kívánt kitöltés megvalósítható. 1 pont

Adjuk össze a 7 sorösszeget, illetve a 7 oszlopösszeget, legyen ez az összeg S. S-et úgy is megkaphattuk volna, ha a négyzetben szereplő minden számot pontosan kétszer adjuk össze. 1 pont

Tehát S egy páros szám. 1 pont

Az indirekt feltevésünk szerint az oszlop- és sorösszegek valamilyen sorrendben az $1, 2, \ldots,$ 14 számok. Azaz $S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 14 = 105$. Ez ellentmond S párosságának, így ellentmondásra jutottunk. Tehát az eredeti állításunkat beláttuk. 1 pont

Összesen: 7 pont