

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny

2015/2016-os tanév

2. (döntő) forduló

Kezdők III. kategória

Feladatok

1. Oldjuk meg a $p^\alpha = 2^\beta + 1$ egyenletet, ahol α, β 1-nél nagyobb egész számok, p^α pedig egy prímszám!

2. Az ABC egységoldalú szabályos háromszög, melynek BC oldalára kifelé olyan BDC egyenlőszárú háromszöget szerkesztünk, amelyben $DB = DC$ és $\angle BDC = 120^\circ$. Az AB és AC oldalakon olyan M és N pontokat jelölünk ki, melyekre $\angle MDN = 60^\circ$. Határozzuk meg az AMN háromszög területét.

3. Egy 2015×2016 -os sakktabla minden négyzetében egy-egy nemnegatív egész szám áll (az i -edik sor j -edik mezőjében lévő számot $a_{i,j}$ jelöli). Ezután minden lépésben kiválasztunk egy 2×2 -es négyzetet, és az ebben szereplő négy számhoz hozzáadunk egy tetszőlegesen megválasztott (a négy mező esetében azonos) k egész számot úgy, hogy a kapott számok ne legyenek negatívak. Adjunk meg egy olyan egyenletet az $a_{i,j}$ ($1 \leq i \leq 2015, 1 \leq j \leq 2016$) számokra, mint változókra, ami pontosan akkor teljesül, ha véges sok lépéssel elérhető, hogy a táblán szereplő összes szám nullává váljon.