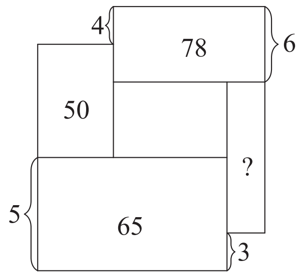
Bolyai János
Matematikai Társulat

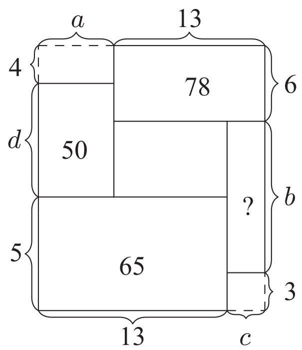
Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2015/2016-os tanév
első (iskolai) forduló
Haladók – II. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Naoki Inaba japán matematikus rejtvényeiben bizonyos téglalapok területét és néhány szakasz hosszát ismerjük, és ez alapján kell egy másik területet vagy távolságot meghatároznunk. A képen látható fejtörőben a ?-lel jelölt területet kell kiszámolnunk. (Vigyázzunk, az ábra nem arányos!)



Megoldás.



Egészítsük ki az ábrát egy nagy téglalappá, és számoljuk ki a 78 és 65 egység területű téglalap vízszintes oldalának hosszát. 3 pont

Mivel a téglalap szemközti oldalai egyenlők, ezért $a + 13 = c + 13$ és $6 + b + 3 = 5 + d + 4$, vagyis $a = c$ és $b = d$. 2 pont

Az 50 egység területű téglalapból $ad = 50$, tehát $bc = da = 50$ is igaz. A keresett terület 50 egység. 2 pont

Összesen: 7 pont

2. Határozzuk meg azokat a p valós számokat, amelyekre az $x^3 - x + p = 0$ egyenletnek van két olyan valós gyöke, amelyek különbsége 1!

Megoldás. Legyen a két gyök c és $c+1$. Ha ezeket az egyenletbe behelyettesítjük, teljesül, hogy $c^3 - c + p = 0$ és $(c+1)^3 - (c+1) + p = 0$. 1 pont

A második egyenletből vonjuk ki az elsőt, közben végezzük el a köbre emelést, így a $3c^2 + 3c = 0$ egyenlethez jutunk. 2 pont

Ennek megoldásai: $c_1 = -1$ és $c_2 = 0$. 1 pont

Ezeket az eredeti egyenletbe visszahelyettesítve mindkét esetben a $p = 0$ értékeket kapjuk. 1 pont

Az $x^3 - x = 0$ egyenlet gyökei -1, 0 és 1, tehát valóban van két olyan valós gyöke, amelyek különbsége 1, ezért $p = 0$ jó megoldás. 2 pont

Megjegyzések

1. Az ellenőrzés más módja is elfogadható, de az ellenőrzés igényének és módszerének egyértelműen meg kell jelennie.
2. Ha a versenyző a $p = 0$ megoldást csak észreveszi, majd bizonyítja, hogy jó, legfeljebb 2 pontot kaphat.

Összesen: 7 pont

3. A 2025-re igaz, hogy $2025 = (20 + 25)^2$. Van-e még ilyen négyjegyű szám?

Megoldás. Keressük azokat a négyjegyű számokat, melyekre igaz, hogy $\overline{abcd} = (\overline{ab} + \overline{cd})^2$. Legyen:

$$x = \overline{ab} = 10a + b,$$
$$y = \overline{cd} = 10c + d.$$

1 pont

Ezekkel a jelölésekkel:

$$\overline{abcd} = 100x + y,$$
$$(\overline{ab} + \overline{cd})^2 = (x + y)^2.$$

1 pont

A keresett számra vonatkozó egyenlőséget felírva, majd átalakítva:

$$\begin{aligned} 100x + y &= (x + y)^2, \\ 99x &= (x + y)^2 - (x + y), \\ 99x &= (x + y)(x + y - 1). \end{aligned}$$

1 pont

Vagyis két szomszédos egész szám szorzatának oszthatónak kell lennie 11-gyel és 9-cel úgy, hogy az x kétjegyű szám legyen. 1 pont

Ez három esetben teljesül: $45 \cdot 44$, $55 \cdot 54$ és $99 \cdot 98$ esetében. 1 pont

A többi esetben ($10 \cdot 11$, $11 \cdot 12$, $21 \cdot 22$, $22 \cdot 23$, $32 \cdot 33$, $33 \cdot 34$, $43 \cdot 44$, $55 \cdot 56$, $65 \cdot 66$, $66 \cdot 67$, $76 \cdot 77$, $77 \cdot 78$, $87 \cdot 88$, $88 \cdot 89$) nem teljesül a 9-cel való oszthatóság, a $99 \cdot 100$ után pedig az x háromjegyű. 1 pont

Tehát a keresett számok:

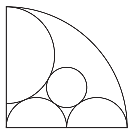
$$2025 \quad (45 \cdot 44, \quad \text{ekkor} \quad x = 20 \quad \text{és} \quad y = 25),$$
$$3025 \quad (55 \cdot 54, \quad \text{ekkor} \quad x = 30 \quad \text{és} \quad y = 25),$$
$$9801 \quad (99 \cdot 98, \quad \text{ekkor} \quad x = 98 \quad \text{és} \quad y = 01).$$
1 pont

Megjegyzés

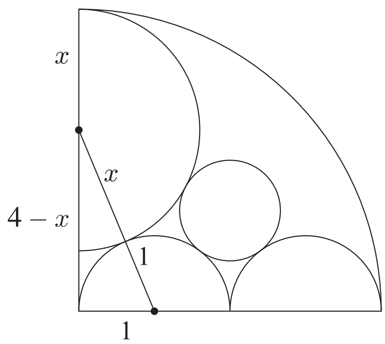
Ha a versenyző találgatással rálel az egyik megoldásra (például $3025 = (30 + 25)^2$), de nem törekszik arra, hogy minden lehetséges esetet megtaláljon, legfeljebb 2 pontot kaphat.

Összesen: 7 pont

4. Egy négy egység sugarú negyedkörbe félköröket írtunk az ábrán látható módon. A két kisebb félkör sugara egyenlő. Ezután megrajzoltuk azt a kört, ami mindhárom félkört érinti. Mekkora ennek a körnek a sugara?

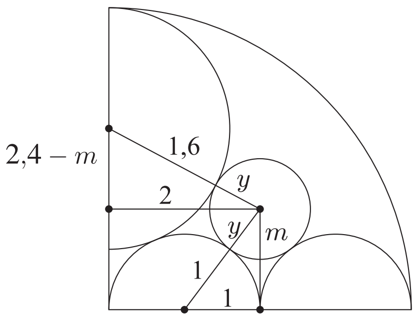


Megoldás.



A nagyobb félkör sugarát jelölje x. A középpontok összekötésével derékszögű háromszöget kapunk.

Felírva a Pitagorasz-tételt $(4 - x)^2 + 1^2 = (1 + x)^2$, ahonnan $16 - 8x = 2x$, tehát $x = 1{,}6$. 2 pont



A kis kör középpontja legyen m távol az alsó sugártól, és a kis kör sugara legyen y.

A kis kör középpontjában találkozó derékszögű háromszögekből:

$$(2{,}4 - m)^2 + 2^2 = (1{,}6 + y)^2,$$
$$m^2 + 1^2 = (1 + y)^2.$$
2 pont

Kivonással $2{,}4^2 - 4{,}8m + 3 = 1{,}6^2 - 1 + 1{,}2y$, ahonnan $7{,}2 = 4{,}8m + 1{,}2y$, majd $6 = y + 4m$ adódik. A második egyenletbe visszahelyettesítve az $y = 6 - 4m$ kifejezést kapjuk a $15m^2 - 56m + 48 = 0$ egyenletet, amelynek gyökei $m_{1,2} = \dfrac{56 \pm 16}{30}$, vagyis $m_1 = 2{,}4$ és $m_2 = \dfrac{4}{3}$. 1 pont

A két gyök közül csak a kisebbik lehet jó, mert a kis kör középpontja „lejjebb” van, mint a nagy félköré. 1 pont

Ha $m = \dfrac{4}{3}$ akkor $y = 6 - 4m = \dfrac{2}{3}$. A kis kör sugara $\dfrac{2}{3}$ egység. 1 pont

Összesen: 7 pont

A megadott javítókulcs és a hozzáfűzött kiegészítés kapcsán több észrevétel érkezett.

Többen kritizálták, hogy a feladat megfogalmazása („Van-e még ilyen négyjegyű szám?”) nem precíz. A feladat kitűzésekor a bizottság úgy gondolta, hogy ez a pontatlanság megengedhető, mert így természetesebb a kérdés, és nem tűnik életszerűnek, hogy valaki az $\overline{abcd} = (\overline{ab} + \overline{cd})^2$ helyett mondjuk az $\overline{abcd} = (\overline{ab} + \overline{cd})^a$ feladattal próbálkozna. Szintén többen nehezményezték, hogy nem volt direkt kimondva az az igény, miszerint az összes ilyen szám megtalálása jelenti a teljes értékű megoldást. Itt is arra alapozott a bizottság, hogy a versenyzők számára ez természetes lesz, a versenyek hagyománya kellő eligazítást nyújt az értelmezéshez.

Az észrevételt tevő kollégák úgy ítélték meg, hogy az eredetileg megadott pontozás nem lenne igazságos, mert a megoldók teljes jóhiszeműséggel gondolhatták azt, hogy ha rátaláltak egy a mintának megfelelő négyjegyű számra, akkor bizonyították, hogy a feltett kérdésre „igen” a válasz, ezért nem indokolható a pontveszteség. Ugyanakkor az is elvárható, hogy az összes megfelelő négyjegyű számot előállító megoldás többet érjen, mint az, amely csak egy jó példát mutat.

A fentiek alapján a 3. feladat pontozása az alábbiak szerint módosul:

- Akik akár levezetéssel, akár próbálgatással rátaláltak egy jó négyjegyű számra, és megmutatták, hogy a szám valóban megfelel a mintának, **megkaphatják a maximális pontszámot a feladatra.**
- Azok a versenyzők pedig, akik megkeresték – az útmutató szerint, vagy más gondolatmenet alapján – az összes jó számot, és bizonyították, hogy listájuk teljes, **a maximális hét pont mellet kapják meg az általánosításért járó további három pontot is.**

5. Adjuk meg az összes olyan pozitív prímekből álló (p, q, r) számhármast, ahol

$a)$ $q \neq r$, valamint

$b)$ $p^q + p^r$ négyzetszám.

Megoldás. Legyen az általánosság megszorítása nélkül $q < r$.

(Természetesen, ha megkapunk így egy (p, q, r) jó számhármast, akkor (p, r, q) is megoldás lesz.)

Ekkor kiemelve p^q-t: $p^q + p^r = p^q(1 + p^{r-q}) = n^2$ valamely egész n-re. 1 pont

A p^q-nak csak p a prímosztója, de $1 + p^{r-q}$ p-vel osztva 1 maradékot ad, emiatt p^q, illetve $1 + p^{r-q}$ relatív prímek. 1 pont

De mivel n^2 prímfelbontásában a prímhatványosztók páros kitevővel szerepelnek, ezért q is páros, vagyis (mivel q prím is) $\rightarrow$ $q = 2$. 1 pont

Vagyis $n^2 = p^q(1 + p^{r-q}) = p^2\big(1 + p^{r-2}\big)$. Ezt osztva p^2-tel $\rightarrow$ $1 + p^{r-2} = \dfrac{n^2}{p^2} = m^2$ valamely egész m-re.

Innen mindkét oldalból 1-t elvéve, és szorzattá alakítva:

$$p^{r-2} = m^2 - 1 = (m + 1)(m - 1).$$ 1 pont

Innen két eset lehetséges: vagy $p \mid m - 1$, vagy $1 = m - 1$.

Ha $1 = m - 1$, akkor $2 = m$, és innen $(m + 1)(m - 1) = 3 = 3^1 = p^{r-2}$. Ekkor $p = 3$, és $r = 3$. Vagyis ekkor a lehetséges számhármasok: $(3; 2; 3)$ és $(3; 3; 2)$. 1 pont

Ha pedig $p \mid m-1$, akkor $p \mid m+1$ miatt $p \mid (m+1)-(m-1) = 2$ is teljesül. Vagyis ekkor $p = 2$.

Mivel ekkor $m - 1$, és $m + 1$ olyan kettőhatványok (hisz $2^{r-2} = (m + 1)(m - 1)$), melyek különbsége 2, emiatt $m - 1 = 2$, és $m + 1 = 4$ lehet csak.

Vagyis $2^{r-2} = 2 \cdot 4 = 8 = 2^3$. Innen $r = 5$.

Vagyis ekkor a lehetséges számhármasok: $(2; 2; 5)$ és $(2; 5; 2)$. 1 pont

Összefoglalva: 4 darab rendezett számhármas felel meg a feltételeknek: $(3; 2; 3)$; $(3; 3; 2)$; $(2; 2; 5)$ és $(2; 5; 2)$. 1 pont

---

Összesen: 7 pont