

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2015/2016-os tanév
első (iskolai) forduló
Haladók – I. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Hány olyan 45-tel osztható \overline{abcba} alakú ötjegyű szám van, ahol a , b és c különböző számjegyeket jelölnek?

Megoldás. A 45-tel való oszthatósághoz a számnak oszthatónak kell lennie 5-tel. Mivel a nem lehet 0, a szám csak 5-re végződhet, azaz $a = 5$.

1 pont

A számnak oszthatónak kell lennie 9-cel, így a számjegyek összege, azaz $10 + 2b + c$ is osztható 9-cel. Mivel b és c különböző számjegyek, így $2b + c$ lehetséges maximális értéke 26. Így $10 + 2b + c$ lehetséges értékei: 18, 27 és 36.

1 pont

Ha $2b + c = 8$, akkor a lehetséges értékek:

b	4	3	2	1	0
c	0	2	4	6	8

(1 pont, de csak ha az összes lehetőség megvan.)

1 pont

Ha $2b + c = 17$, akkor a lehetőségek:

b	8	7	6	5 nem lehet a miatt	4
c	1	3	5 nem lehet a miatt	7	9

(1 pont az összes lehetőség megtalálásáért és 1 pont a 6;5 és 5;7 pár kizárásáért.)

2 pont

Ha $2b + c = 26$, akkor csak a $b = 9$, $c = 8$ lehetőség lesz jó.

1 pont

Összesen tehát 9 a feltételeknek megfelelő szám van.

1 pont

Az összes eset indoklás nélküli felsorolásáért maximum 2 pont adható.

Összesen: 7 pont

2. Az $y \geq 0$ félsíknak hány olyan rácspontja van, amelyeknek a koordinátái kielégítik az alábbi egyenlőséget?

$$x^2 + 3y = 40.$$

(Rácspont a koordináta-rendszer olyan pontja, melynek mindkét koordinátája egész szám.)

Megoldás. A hozzárendelési szabályt átalakítva:

$$x^2 = 40 - 3y,$$

$$x = \pm \sqrt{40 - 3y}.$$

1 pont

A gyökjel alatti kifejezésre:

$$40 - 3y \geq 0,$$

$$\frac{40}{3} \geq y.$$

1 pont

Mivel y csak egész szám lehet, így: $0 \leq y \leq 13$, vagyis $0 \leq 40 - 3y \leq 40$.

1 pont

Ugyanakkor $40 - 3y$ értéke négyzetszám (0; 1; 4; 9; 16; 25; 36) lehet.

1 pont

A felsorolt esetek közül ez a következőknél teljesül (a 0 és 36 esetében y nem egész):

$$40 - 3y = 1, \quad \text{ekkor } x = \pm 1 \text{ és } y = 13,$$

$$40 - 3y = 4, \quad \text{ekkor } x = \pm 2 \text{ és } y = 12,$$

$$40 - 3y = 16, \quad \text{ekkor } x = \pm 4 \text{ és } y = 8,$$

$$40 - 3y = 25, \quad \text{ekkor } x = \pm 5 \text{ és } y = 5.$$

A négy jó eset felismerése.

1 pont

Annak felismerése, hogy mindegyik esetben x -re két megoldás adódik.

1 pont

Tehát a grafikon 8 rácsponton halad át:

$$(1; 13), \quad (-1; 13), \quad (2; 12), \quad (-2; 12), \quad (4; 8), \quad (-4; 8), \quad (5; 5), \quad (-5; 5).$$

A rácspontok számának megadása.

1 pont

Összesen: 7 pont

3. Határozzuk meg azon a és b valós számokat, amelyekre igaz, hogy a és b is gyöke az $x^2 + ax + b = 0$ egyenletnek!

Megoldás. Mivel a és b is megoldása az egyenletnek, ezért helyettesítsük be az egyenletbe a -t:

$$a^2 + a^2 + b = 0.$$

Ebből $b = -2a^2$. Most b -t behelyettesítve kapjuk, hogy $b^2 + ab + b = 0$. 1 pont

Utóbbiba behelyettesítve a $b = -2a^2$ -et: $(-2a^2)^2 - 2a^3 - 2a^2 = 0$ adódik. 1 pont

$2a^2$ -et kiemelve kapjuk, hogy $2a^2(2a^2 - a - 1) = 0$. 1 pont

Szorzat akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla.

Így megoldás, ha $a = 0$, $b = 0$, illetve ha $2a^2 - a - 1 = 0$. 1 pont

Ha a és b is nulla, akkor a másodfokú egyenletünk az $x^2 = 0$ alakot ölti, melynek az a és b valóban megoldásai. 1 pont

A $2a^2 - a - 1 = 0$ másodfokú egyenlet gyökei az $a_1 = 1$ és az $a_2 = -\frac{1}{2}$.

Ha $a = 1$, akkor $b = -2$. Ezt visszahelyettesítve az egyenletünk $x^2 + x - 2 = 0$, amelynek $a = 1$ és $b = -2$ valóban a megoldásai. 1 pont

Végül ha $a = -\frac{1}{2}$, akkor $b = -\frac{1}{2}$. Ezt visszahelyettesítve az egyenletünk $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$ alakú lesz. Ennek az egyenletnek a gyökei az $x_1 = -\frac{1}{2}$ és $x_2 = 1$. Ebben az esetben $a = b = x_1$, tehát megint csak igaz, hogy a és b is megoldása az egyenletnek. 1 pont

Összefoglalva a feladat megoldásai a következő $(a; b)$ számpárok: $(0; 0)$, $(1; -2)$ és $(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2})$.

Összesen: 7 pont

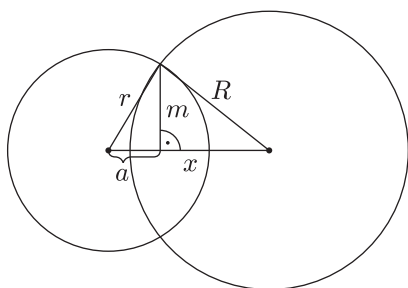
4. Két, egy síkban lévő, egymást metsző kör középpontjainak távolsága 12 egység. Mindkét kör sugarának hossza egész szám. A metszéspontjukat összekötő egyenes a középpontjaik által meghatározott szakaszt 1 : 2 arányban osztja.

Mekkorák a körök sugarai?

Megoldás. Használjuk a következő ábra jelöléseit!

Helyes ábra használható jelölésekkel.

1 pont



Jelölje r és R a körök sugarát, x a középpontok távolságát, m pedig a metszéspontokat összekötő szakasz felét!

Nyilvánvaló, hogy a metszéspontokat összekötő szakasz merőleges a középpontokat összekötő szakaszra, így két derékszögű háromszög keletkezik.

Írjuk fel ezekre Pitagorasz tételét!

$$r^2 = a^2 + m^2,$$

$$R^2 = (x - a)^2 + m^2.$$

1 pont

Az egyenleteket kivonva egymásból a következő összefüggéshez jutunk:

$$R^2 - r^2 = x^2 - 2ax,$$

$$(R - r)(R + r) = x(x - 2a).$$

Mivel: $x = 12$; $a = 4$; $x - a = 8$, behelyettesítés után adódik:

$$(R - r)(R + r) = 48.$$

1 pont

A 48-at két tényezőre bontva öt eset adódik:

$$1 \cdot 48, \quad 2 \cdot 24, \quad 3 \cdot 16, \quad 4 \cdot 12 \quad \text{és} \quad 6 \cdot 8.$$

Az öt eset felismerése.

1 pont

1 · 48 ekkor $R = 24,5$ és $r = 23,5$ (a sugarak nem egészek),

2 · 24 ekkor $R = 13$ és $r = 11$,

3 · 16 ekkor $R = 9,5$ és $r = 6,5$ (a sugarak nem egészek),

4 · 12 ekkor $R = 8$ és $r = 4$ (a körök érintik egymást),

6 · 8 ekkor $R = 7$ és $r = 1$ (a körök nem metszik egymást).

A megoldást nem jelentő esetek kizárása magyarázattal.

2 pont

(Ha magyarázat nélkül jelennek meg az esetek, illetve nem jelenik meg minden eset, akkor ez a 2 pont bontható.)

A feladat feltételeinek megfelelő megoldás tehát: $R = 13$ és $r = 11$.

A helyes megoldás megadása.

1 pont

Összesen: 7 pont

5. Hány rendezett (x, y, z) valós számhármias megoldása van az alábbi egyenletrendszernek:

$$\begin{cases} x + y + z = 11, \\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 66. \end{cases}$$

Megoldás. Az első egyenletből fejezzük ki z -t, majd helyettesítsük be a második egyenletbe:

$$z = 11 - x - y$$

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = x^2 + 2y^2 + 3(11 - x - y)^2 = 66, \quad 1 \text{ pont}$$

$$x^2 + 2y^2 + 3(121 + x^2 + y^2 - 22x - 22y + 2xy) = 66,$$

$$4x^2 + 5y^2 + 297 - 66x - 66y + 6xy = 0. \quad 1 \text{ pont}$$

Tekintsük ezt egy x -ben másodfokú y paraméterű egyenletnek. 1 pont

Rendezés után:

$$(I) \quad 4x^2 + 6(y - 11)x + (5y^2 - 66y + 297) = 0.$$

Ha az eredeti egyenletrendszernek van valós megoldása, akkor ennek a másodfokú egyenletnek is, ez utóbbi pontosan akkor áll fenn, ha a diszkrimináns nemnegatív, azaz

$$D = (6(y - 11))^2 - 4 \cdot 4 \cdot (5y^2 - 66y + 297) \geq 0, \quad 1 \text{ pont}$$

$$\begin{aligned} D &= 36(y^2 - 22y + 121) - 16(5y^2 - 66y + 297) = \\ &= 4 \cdot (9(y^2 - 22y + 121) - 4(5y^2 - 66y + 297)) = \\ &= 4 \cdot (-11y^2 + 66y - 99) = -44 \cdot (y^2 - 6y + 9) = -44 \cdot (y - 3)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Ez csak úgy teljesülhet, ha $(y - 3)^2 = 0$, azaz $y = 3$. 2 pont

Ezt (I)-be helyettesítve azt kapjuk, hogy $4x^2 - 48x + 144 = 0$, aminek egyetlen megoldása az $x = 6$.

Mindezek felhasználásával $z = 11 - x - y = 11 - 6 - 3 = 2$, tehát egyetlen ilyen valós számhármias létezik, a $(6, 3, 2)$. 1 pont

A megoldás kielégíti az egyenletrendszert.

Összesen: 7 pont