Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2012/2013-as tanév
kezdők I–II. kategória II. forduló
kezdők III. kategória I. forduló

Megoldások és javítási útmutató

1. Egy osztályban minden diák jár a háromféle szakkör valamelyikére: 17-en matematikára, 13-an fizikára és 11-en kémiára. Azok száma, akik pontosan kétféle szakkörre járnak éppen négyszerese azok számának, akik mindhárom szakkörön részt vesznek. Hányan járnak mindhárom szakkörre és mennyi az osztálylétszám, ha az osztályba járó fiúk egyharmad része szemüveges, valamint a nem szemüveges fiúk száma egyenlő a lányok számával? (6 pont)

Megoldás. Mivel minden diák jár valamelyik szakkörre, ezért az osztálylétszámot megkaphatjuk úgy, hogy a 17, a 13 és a 11 összegéből levonjuk egyszer a pontosan két szakkörre járók számát és kétszer azokét, akik mindhárom szakkörre járnak. 1 pont

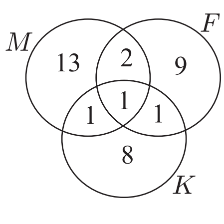
Jelöljük x-szel a mindhárom szakkörre járók számát! Ekkor pontosan két szakkörre $4x$ diák jár.

Így az osztálylétszámot a $17 + 13 + 11 - 4x - 2x = 41 - 6x$ összefüggés adja meg. 1 pont

Mivel a fiúk számának a kétharmad része egyenlő a lányok számával, ezért az osztálylétszám osztható öttel. 1 pont

Tehát az osztálylétszám egy olyan öttel osztható szám, amely egy hattal osztható számmal kisebb 41-nél. Felírva a lehetséges értékeket $\{35, 29, 23, 17, 11, 5\}$ kapjuk, hogy az osztálylétszám 35, így mindhárom szakkörre 1 diák jár. 2 pont

Egy ilyen lehetőséget mutat az alábbi halmazábra.



1 pont

2. Van 6-6 piros és zöld matricánk, melyeken az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számok találhatók mindkét szín esetében. Felragasztottuk valahogyan a piros matricákat egy kocka 6 oldalára. Ezt követően a zöld matricákat is felragasztjuk egy-egy oldalra. Ezután a kocka minden egyes csúcsára ráírjuk, hogy mennyi a csúcsot tartalmazó kockalapokon lévő 3 piros és 3 zöld szám összege. A zöld matricák akkor lettek helyesen felragasztva, ha az összes csúcsra ugyanaz a szám került. Hogyan ragaszthattuk fel a piros matricákat, ha az derül ki, hogy a zöld matricák felragasztására pontosan 6-féle helyes módszer van? Adjunk meg legalább egy megoldást! (6 pont)

Megoldás. Először belátjuk, hogy pontosan akkor helyes egy felragasztás, ha a szemközti lapokon lévő 2-2 szám összege megegyezik. Egyrészt nyilvánvaló, hogy egy ilyen felragasztás helyes, hiszen minden csúcsban egy-egy oldal találkozik a szemközti oldalpárokból, így minden csúcsra ugyanaz lesz a kérdéses 3 piros és 3 zöld szám összege. Másrészt tekintsünk egy helyes felragasztást. Ekkor a kocka tetszőleges élének két végpontján is ugyanaz a szám kell, hogy szerepeljen. Márpedig e két csúcshoz tartozó lapok közül 2-2 megegyezik. A nem megegyező lapok pedig éppen szemköztes lapok, tehát azonos kell, hogy legyen e két szemköztes lapon lévő 2-2 szám összege. Bármelyik szemköztes lappárra van egy őket összekötő él, melyre ez a gondolatmenet érvényes. 2 pont

A továbbiakban tehát elegendő a szemköztes lappárokra figyelni. Az előzőek szerint a zöld matricák felragasztása akkor lehet helyes, ha a szemköztes lappárokon a piros és a zöld számok különbségének abszolút értéke megegyezik. (Pl. piros: 2, 4; zöld: 3, 1. itt a különbség a pirosaknál 2, a zöldeknél -2.) 1 pont

Ezek után elég találnunk a piros számoknak egy olyan felragasztását, amelynél a szemköztes lapok számainak különbsége mindig megegyezik, mert ekkor ugyanezek a számpárok használhatók a zöld számok felragasztásánál tetszőleges permutációban, ezekből pedig a 3 lappár esetében éppen 6 db van. 1 pont

Erre 2-féle lehetőség is van: 12, 34, 56; illetve 14, 25, 36. (Itt pl. az „12” azt jelöli, hogy az egyik szemköztes lappárra az 1-es és 2-es piros számok vannak felragasztva.) Az elsőnél a szemköztes lapokon lévő számok különbsége mindig 1, a másodiknál pedig mindig 3. Az első esetben minden olyan zöld felragasztás helyes lesz, mely a 21, 43, 65 számpárokkal dolgozik, az iménti három számpár tetszőleges sorrendje mellett. Hasonlóan, a másik esetnél a 41, 52, 63 számpárok adnak helyes ragasztási sémát, tetszőleges párosításban alkalmazva. Már csak azt kell végiggondolni, hogy az 1-től 6-ig lévő számokat csak egyféleképpen lehet 3 párba osztani úgy, hogy a párok tagjai közötti különbség mindig azonos (1, illetve 3) legyen. Ez viszont nyilvánvaló, hiszen a legkisebb szám (az 1-es) párja egyértelműen kijelölhető, a fennmaradó számok közül a legkisebb párja pedig ezek után szintén mindig egyértelműen adódik. 2 pont

Ha a versenyző a fönti két megoldás közül az egyiket megtalálja, és teljes indoklást ad arra, hogy valóban pontosan 6*-féle helyes ragasztást tesz lehetővé, akkor már jár a 6 pont. A másik megoldás megtalálásáért* $+1$ pont *jár, amennyiben pedig sikerül belátnia (pl. az összes eset módszeres végignézésével), hogy nincs is több megoldási lehetőség, további* $+2$ pontot *kaphat.*

3. Határozzuk meg azokat a lineáris $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ $(x \in \mathbb{R})$ függvényeket, melyekre

$$F(x) = \big|f(x)\big| - \big|g(x)\big| + h(x) = \begin{cases} -1, & \text{ha } \ x < -1, \\ 3x+2, & \text{ha } \ -1 \leqq x < 0, \\ -2x+2, & \text{ha } \ 0 \leqq x. \end{cases} \qquad \text{(8 pont)}$$

Megoldás. Mivel $F(x)$ intervallumonként konstans és elsőfokú függvényekkel van megadva és a hozzárendelési szabályok alapján az abszolútértékes kifejezések előjelváltási helyei az $x = -1$ és az $x = 0$ helyek, ezért célszerű $F(x)$-et az alábbi alakban keresni:

$$F(x) = \big|a(x+1)\big| \mp |bx| + cx + d. \qquad \text{2 pont}$$

Ekkor

$$F(x) = \begin{cases} (c-a \pm b)x + d - a, & \text{ha } \ x < -1, \\ (a+c \pm b)x + a + d, & \text{ha } \ -1 \leqq x < 0, \\ (a \mp b + c)x + a + d, & \text{ha } \ 0 \leqq x. \end{cases} \qquad \text{2 pont}$$

Az együtthatók egyeztetése alapján

$$\begin{aligned} c - a \pm b &= 0, & \qquad d - a &= -1, \\ a + c \pm b &= 3, & a + d &= 2, \\ a \mp b + c &= -2, & a + d &= 2. \end{aligned} \qquad \text{2 pont}$$

Az egyenletrendszer megoldásaként kapott értékek: $a = \frac{3}{2}$, $b = \pm\frac{5}{2}$, $c = -1$ és $d = \frac{1}{2}$.

A keresett függvények pedig a következők:

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{3}{2}x + \frac{3}{2},$$

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{5}{2}x,$$

$$h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto -x + \frac{1}{2}.$$

A kapott függvények teljesítik a feladat feltételét. 2 pont

4. Tudjuk, hogy $n = 2^{30} \cdot 3^{20}$. Hány olyan pozitív osztója van az n^2 számnak, mely kisebb n-nél és nem osztója n-nek? (10 pont)

Megoldás. Nézzük a problémát általánosan!

Legyen az n egynél nagyobb pozitív egész szám kanonikus alakja $n = p^r \cdot q^s$, ahol p, q két különböző prímszám. Ekkor n^2 kanonikus alakja $n^2 = p^{2r} \cdot q^{2s}$. Mint tudjuk az egynél nagyobb pozitív egész szám pozitív osztóinak a számát meghatározhatjuk a kanonikus alakból. Így az n pozitív osztóinak a száma $(r+1)(s+1)$, míg az n^2 pozitív osztóinak a száma $(2s+1)(2r+1)$. 2 pont

Az n^2 osztói közül minden egyes n-nél kisebb pozitív osztóhoz hozzárendelhető pontosan egy n-nél nagyobb osztó. Ez a hozzárendelés kölcsönösen egyértelmű, mert különbözőkhöz, különbözők tartoznak. 1 pont

Az így kapott osztópárok tagjainak a szorzata n^2. Az előzőek alapján pontosan annyi n-nél kisebb pozitív osztója van az n^2-nek, mint n-nél nagyobb. 1 pont

Ezek száma:

$$\frac{(2r+1)(2s+1)-1}{2} = 2sr + s + r.$$ 2 pont

Az n miden osztója, osztója n^2-nek is. 1 pont

Így n^2-nek

$$\frac{(2r+1)(2s+1)-1}{2} - \big((r+1)(s+1)-1\big) = 2sr + s + r - rs - r - s = rs$$

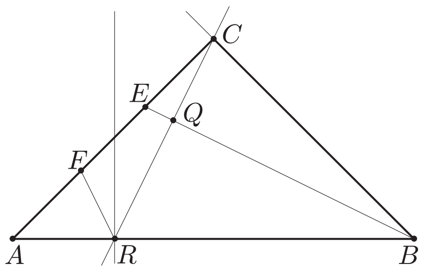
olyan pozitív osztója van, amely n-nél kisebb és nem osztója n-nek. 2 pont

Így a válasz: 600. 1 pont

(Ha a problémát ilyen általános alakban helyesen megoldja, +1 pont adható.)

5. Az ABC egyenlő szárú háromszög derékszögű csúcsa C. Az AC befogón felvesszük az E és F pontokat úgy, hogy $CE = FA$ teljesüljön! Legyen Q pont a C csúcsból a BE-re bocsátott merőleges talppontja, míg R a CQ egyenes és az AB átfogó metszéspontja! Határozzuk meg, hogy a $CRF\sphericalangle$ felezője mekkora szöget zár be a BC befogó egyenesével! (10 pont)

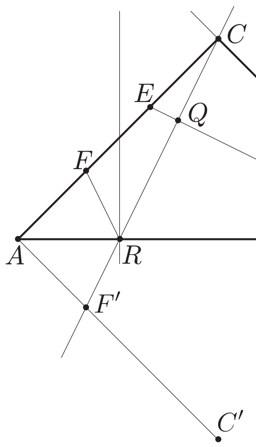
Megoldás.



Készítsünk ábrát! 1 pont

Belátjuk, hogy $CRB\sphericalangle = ARF\sphericalangle$, ebből következik, hogy a $CRF\sphericalangle$ felezője merőleges az AB egyenesre, amiből kapjuk, hogy a kérdezett szög 45°. 2 pont

Tükrözzük a CA oldalt az AB átfogóra! A C pont tükörképe legyen C'! A CR és az AC' metszéspontja legyen F'! Mivel az ABC háromszög egyenlő szárú derékszögű háromszög, ezért $CAB\sphericalangle = 45°$, így a tükrözés miatt $BAC'\sphericalangle = 45°$, tehát $CAC'\sphericalangle = 90°$. 3 pont



Mivel CF' merőleges EB-re és AC merőleges BC-re, ezért $ACF'\sphericalangle = EBC\sphericalangle$, hisz merőleges szárú hegyesszögek. 1 pont

Az EBC és a CAF' háromszög derékszögű, valamint $ACF'\sphericalangle = EBC\sphericalangle$ és $BC = CA$, így a két háromszög egybevágó. 1 pont

Ebből következik, hogy $AF = CE = AF'$, tehát F' az F pont AB egyenesre vett tükörképe, így $ARF\sphericalangle = F'RA\sphericalangle$. 1 pont

Az $F'RA\sphericalangle = CRB\sphericalangle$, mert csúcsszögek. Ez alapján $ARF\sphericalangle = CRB\sphericalangle$.

Vagyis a keresett szög 45°. 1 pont