Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2012/2013-as tanév
I. forduló
kezdők I–II. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Az a és b nullától különböző valós számokra teljesül az alábbi összefüggés.

$$a^3 + \left(3a^2 + 1\right)b + \left(3b^2 + 1\right)a + b^3 = 0$$

Mennyi lehet az $\frac{a}{b}$ hányados értéke? (6 pont)

Megoldás. Rendezve és szorzattá alakítva:

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + a + b = 0, \qquad \text{1 pont}$$

$$(a+b)^3 + a + b = 0, \qquad \text{1 pont}$$

$$(a+b)\left((a+b)^2 + 1\right) = 0. \qquad \text{2 pont}$$

Mivel a második tényező pozitív, csak $a + b = 0$ esetén lehet a szorzat 0. 1 pont

Innen pedig a keresett hányados -1. 1 pont

2. A 2011, 2012, 2013, 2014 számok közül melyek írhatók fel kettő vagy több egymást követő pozitív páratlan szám összegeként? (6 pont)

Megoldás. Két szomszédos páratlan szám összege 4-gyel osztható, mivel $(2k-1) + (2k+1) = 4k$ ($k \in \mathbb{Z}$), ezért páros sok szomszédos páratlan szám összege is 4-gyel osztható. 1 pont

Páratlan sok egymást követő páratlan szám összege páratlan, és mivel ilyenkor a középsőre szimmetrikusan elhelyezkedő tagok összege a középső tag többszöröse, az összeg a középső szám többszöröseként összetett szám. 1 pont

Mivel a 2011 prímszám, a 2014 pedig 4-gyel osztva 2 maradékot adó páros szám, azaz egyik sem osztható 4-gyel és nem is páratlan összetett szám, ezért ezek nem állíthatók elő egymást követő pozitív páratlan számok összegeként. 1-1 pont

A 2012 előállítása pl. $2012 = 1005 + 1007$. 1 pont

A 2013 előállítása a $2013 = 3 \cdot 671$ szorzattá bontás alapján $2013 = 669 + 671 + 673$. 1 pont

Megjegyzés:

A feladat általánosítható:

Minden $4n$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ alakú szám előáll két szomszédos páratlan szám összegeként a $4n =$ $= (2n-1) + (2n+1)$ alakban.

Továbbá bármely $2n+1 = p \cdot q$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ alakú páratlan szám előállítható

$$(p-q+1) + (p-q+3) + \ldots + p + \ldots + (p+q-3) + (p+q-1)$$

alakban, ahol p és q olyan pozitív páratlan számok, melyekre $p \geqq q > 1$.

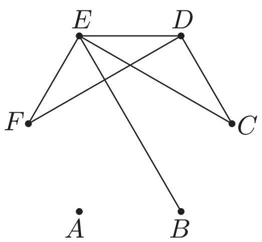
3. Egy esküvői vacsorán egy hatfős asztaltársaság tagjai közül néhányan ismerik egymást. A násznagy megkérdezi az asztaltársaság tagjait, hogy hány személyt ismernek az asztalnál ülők közül. Az első öt válaszadó által kimondott öt szám mindegyike különbözik egymástól. Hány embert ismerhet a hatodik személy az asztalnál ülők közül? (Az ismeretségeket kölcsönösnek tételezzük fel.) (6 pont)

Megoldás. Mivel az ismeretségek kölcsönösek, így nem lehetséges, hogy a társaságban van valaki, aki 5 személyt, azaz mindenkit ismer és olyan is, aki senkit sem ismer. 1 pont

Így az öt különböző válasz – a sorrendtől eltekintve – csak kétféleképpen alakulhatott:

1. eset: Az első öt szám: 0, 1, 2, 3, 4.

Jelöljük a válaszadókat rendre az A, B, C, D és E betűkkel és jelölje a hatodik válaszadót F!

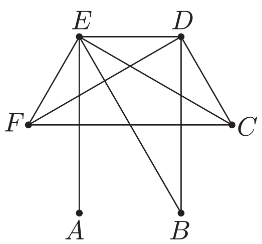


Mivel A senkit sem ismer, így E-nek csak úgy lehet 4 ismerőse, hogy A-n kívül mindenkit ismer. Ekkor B egyetlen ismerőse E. D-nek csak úgy lehet 3 ismerőse, ha A-n és B-n kívül mindenkit ismer. Így C két ismerőse D és E.

Mindezek alapján a hatodik válaszadó (F) két személyt (D, E) ismer. 2 pont

2. eset: Az első öt szám: 1, 2, 3, 4, 5.

Jelöljük a válaszadókat rendre az A, B, C, D és E betűkkel és jelölje a hatodik válaszadót F!



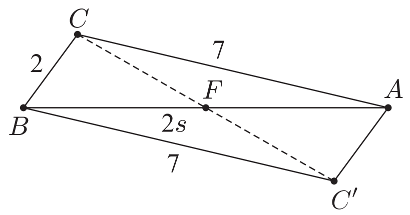
E-nek csak úgy lehet 5 ismerőse, hogy mindenkit ismer. Így A egyetlen ismerőse E. D-nek csak úgy lehet 4 ismerőse, ha A-n kívül mindenkit ismer. Így B két ismerőse D és E. C-nek csak úgy lehet 3 ismerőse, ha A-n és B-n kívül mindenkit ismer.

Mindezek alapján a hatodik válaszadó (F) három személyt (C, D, E) ismer. 2 pont

Tehát a hatodik személy 2 vagy 3 személyt ismerhet az asztalnál ülők közül. 1 pont

4. Hány olyan különböző (egymással nem egybevágó) háromszög van, amelynek két oldala 2 cm és 7 cm hosszúságú, és a harmadik oldalhoz tartozó súlyvonal cm-ben vett mérőszáma is egész szám? (6 pont)

Megoldás.



Legyen $a = 2$ cm, $b = 7$ cm és jelölje a harmadik oldalhoz tartozó súlyvonalat s ($s \in \mathbb{Z}^+$)!

Ha a háromszöget tükrözzük a c oldal felezőpontjára, akkor az $ACBC'$ paralelogrammát kapjuk. 1 pont

Tekintsük a CBC' háromszöget! Ennek a háromszögnek az oldalai a, b és $2s$ hosszúságúak.

Felírva a háromszög-egyenlőtlenséget mindhárom oldalra az alábbi egyenlőtlenségekhez jutunk:

$$2s < a + b, \quad \text{azaz} \ \ 2s < 9;$$

$$a < 2s + b, \quad \text{azaz} \ \ 2 < 2s + 7 \ \text{(ez nyilván teljesül) és}$$

$$b < 2s + a, \quad \text{azaz} \ \ 7 < 2s + 2, \ \text{ahonnan } 5 < 2s.$$

3 pont

Összefoglalva: $5 < 2s < 9$. Innen $s = 3$ cm vagy 4 cm. 1 pont

Azaz két ilyen háromszög van. 1 pont