Bolyai János
Matematikai Társulat

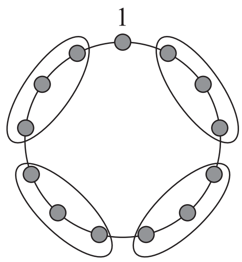
Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2012/2013-as tanév
1. forduló
haladók III. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Egy kör kerületére felírjuk 1-től 13-ig az egészeket valamilyen sorrendben. Három (a kör mentén) szomszédos számot *triónak* nevezünk. (13 ilyen csoport van.) A trióban lévő három szám összegét: a *trió összegének* hívjuk. Egy *trió maximális,* ha a trió összege nagyobb, vagy egyenlő, mint az adott sorrendnél fellépő másik 12 trió bármelyikének az összege.

Mennyi a maximális trió összegének minimuma (az összes lehetséges sorrend esetén)?

Megoldás. Tekintsük a következő ábrát!

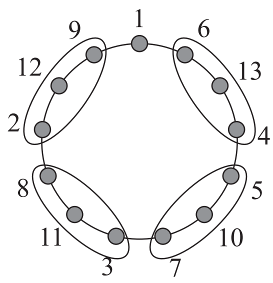


A kör kerületén ott van valahol az 1-es szám (az ábrán: „délben”), a maradék 12 számot az ábra szerint osszuk fel 4 diszjunkt trióra! 2 pont

Ennek a 4 triónak az összege: $2 + 3 + \ldots + 13 = 90$. (Összegeik átlaga: $90/4 = 22{,}5$)

Vagyis a 4 trió között van olyan, amelynek összege legalább 23.

Így a maximális trió összegének minimuma legalább 23 … 2 pont
…, és a 23-as minimum el is érhető a következő ábra szerint. (A 13 darab „ellenőrzést” nem mellékeljük.)



Vagyis a maximális trió összegének minimuma 23. 3 pont

Összesen: 7 pont

Megjegyzések:

– Ha a versenyző valamilyen módon igazolja, hogy a maximális trió összegének minimuma legalább 22 *(a* 23*-as érték helyett) az első* 4 *pontból kapjon* 2 *pontot.*

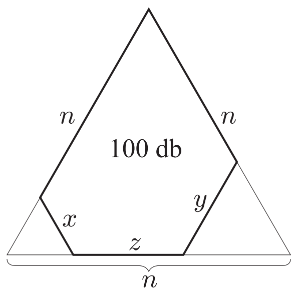
– Az utolsó három pont természetesen akkor is jár, ha a versenyző nem indokolja a „legalább 23*”-at (az első* 4 *pontért), de megfelelő olyan ábrája van, ahol a maximális trió összege* 23!

2. Egy konvex ötszög pontosan 100 darab egységnyi oldalú egybevágó szabályos háromszögből rakható ki (hézag- és átfedés nélkül). Mekkora lehet az ötszög kerülete?

Megoldás.

Egybevágó szabályos háromszögekből egy újabb szabályos háromszöget csak négyzetszám számú darabból lehet kirakni. Esetünkben egy n oldalú szabályos háromszög n^2 egységnyi oldalú kis háromszögből állhat. 1 pont

A feladat feltételeinek megfelelő ötszög az alábbi ábra szerint kiegészíthető egy n oldalú szabályos háromszögre:



Ha például $x \leqq y$, akkor $1 \leqq x \leqq y < n$, $\;n = x + y + z$ az ötszög létrejöttének feltétele, ahol $z \geqq 1$.

Bevezető megállapításunk alapján

$$(x + y + 1)^2 - x^2 - y^2 \leqq (x + y + z)^2 - x^2 - y^2 = 100.$$

A felírt egyenlőtlenség rendezett alakja

$$2x + 2y + 2xy \leqq 99.$$ 1 pont

Ha $x \leqq y$, akkor $4x + 2x^2 \leqq 99$, azaz $x^2 + 2x \leqq 49{,}5$, ahonnan $x \leqq 6$ következik. 1 pont

Mivel $n^2 - x^2 - y^2 = 100$, ezért

(1) $x = 1$ esetén $n^2 - y^2 = 101$, így $n - y = 1$, $n + y = 101$, ahonnan $n = 51$, $y = 50$ nem ad megoldást.

(2) $x = 2$ esetén $n^2 - y^2 = 104$, ezért $n - y = 2$, $n + y = 52$ vagy $n - y = 4$, $n + y = 26$ lehetséges.

Az első esetben $n = 27$, $y = 25$, ami nem ad megoldást.

A második esetben $n = 15$, $y = 11$. Ekkor $x = 2$, $y = 11$, $z = 2$, a másik két oldal pedig 4, illetve 13 egység hosszú. Az ötszög kerülete pedig 32 egységnyi. 2 pont

(3) Az $x = 3$, $x = 4$, $x = 5$, $x = 6$ esetekben rendre $n^2 - y^2 = 109$, $n^2 - y^2 = 116$, $n^2 - y^2 = 125$, $n^2 - y^2 = 136$ adódik.

Az $n^2 - y^2 = (n - y)(n + y)$ azonosság alapján $n - y < n + y$ felhasználásával a felsorolásnak megfelelően az

$$\left.\begin{array}{l} n-y=1 \\ n+y=109 \end{array}\right\}, \qquad \left.\begin{array}{l} n-y=2 \\ n+y=58 \end{array}\right\}, \qquad \left.\begin{array}{l} n-y=1 \\ n+y=125 \end{array}\right\},$$

$$\left.\begin{array}{l} n-y=5 \\ n+y=25 \end{array}\right\}, \qquad \left.\begin{array}{l} n-y=2 \\ n+y=68 \end{array}\right\}, \qquad \left.\begin{array}{l} n-y=4 \\ n+y=34 \end{array}\right\}$$

egyenletrendszerek adódnak, felhasználva azt is, hogy $n - y$ és $n + y$ azonos paritásúak.

A felírt egyenletrendszerek egyikének sincs a feladat feltételeinek megfelelő megoldása. 2 pont

Tehát az ötszög kerülete csak 32 egység hosszú lehet.

Összesen: 7 pont

3. Van 15 darab különböző 2 és 2013 közé eső pozitív egészünk úgy, hogy bármely kettő (különböző) közülük relatív prím egymáshoz.

Igazoljuk, hogy a számok között van prím!

Megoldás. Indirekt tegyük fel, hogy a számok között nincs prím.

Ekkor minden szám legalább két (nem feltétlenül különböző) prímszám szorzatára bontható, és mivel relatív prímek egymáshoz, ezért két különböző szám prímfelbontásában nem szerepelhetnek azonos prímek. 2 pont

Legyen a 15 számunk $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{15}$ a legkisebb prímtényezőik szerint növekvő sorrendben felsorolva.

(Vagyis, $i < j$ akkor, és csak akkor, ha a_i legkisebb prímtényezője kisebb, mint a_j legkisebb prímtényezője.) 2 pont

Vizsgáljuk a_{15} prímtényezős felbontását!

a_{15} legkisebb prímtényezője (az előző pont miatt) legalább akkora, mint a 15-dik pozitív prím, ami $(2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47)$ 47.

Vagyis $a_{15} \geqq 47 \cdot 47 = 2209 > 2013$. 2 pont

Ellentmondásra jutottunk, a hiba csak az indirekt feltevésünkben lehet, vagyis valóban van a 15 szám között prím. 1 pont

---

Összesen: 7 pont

Megjegyzés: a feladat olyan értelemben „éles”, hogy ha csak 14 *számunk lenne* 2–2013*-ig, már nem lenne igaz az állítás.*

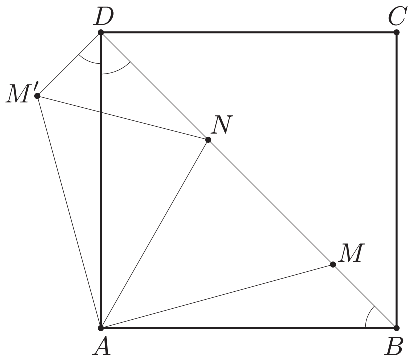
Erre jó ellenpélda az $a_1 = 2^2$, $a_2 = 3^2$, $a_3 = 5^2$, …, $a_{14} = 43^2 = 1849$ *számok.*

4. Az $ABCD$ négyzet BD átlóján úgy vettük fel az M és N pontokat, hogy

$$BM^2 + ND^2 = MN^2.$$

Mekkora az $MAN\sphericalangle$?

Megoldás. Először jegyezzük meg, hogy a pontok sorrendje B, M, N, D, hiszen a B, N, M, D sorrendben már BM^2 is nagyobb lenne, mint MN^2. 1 pont



Készítsünk ábrát! Ahhoz, hogy a feltételt fel tudjuk használni, létrehozunk egy olyan háromszöget, amelynek oldalai BM, MN és ND. Ehhez forgassuk el A körül 90°-kal az ABM háromszöget, az ábrán látható módon az ADM' háromszögbe. 2 pont

Az elforgatás miatt egyrészt $DM' = BM$, másrészt $ADM'\sphericalangle = ABM\sphericalangle = 45°$. Tehát NDM' derékszögű háromszög, vagyis Pitagorasz tétele és a feltétel alapján $M'N = MN$. 1 pont

Szintén a forgatás miatt $AM = AM'$, így $AMNM'$ deltoid. 1 pont

Végül vegyük észre, hogy ismét a forgatás miatt AM' merőles AM-re, és a deltoid AN átlója felezi A-nál lévő szögét, tehát $MAN\sphericalangle = 45°$. 2 pont

Összesen: 7 pont

5. Melyek azok az x valós számok, amelyekre teljesül, hogy

$$[x] + [2x] + [3x] + \ldots + [2012x] = 2013?$$

($[y]$ értéke az a legnagyobb egész szám, amely y-nál nem nagyobb.)

Megoldás. Először belátjuk, hogy $[2012x] < 3$. Ha ugyanis $3 \leqq [2012x]$ lenne, akkor $3 \leqq 2012x$, azaz $\frac{3}{2012} \leqq x$.

Az $f(x) = [x] + [2x] + [3x] + \ldots + [2012x]$ függvény növekvő, de

$$f\left(\frac{3}{2012}\right) = 0 \cdot 670 + 1 \cdot 671 + 2 \cdot 670 + 3 \cdot 1 = 2014,$$

ezért $x < \frac{3}{2012}$. 2 pont

Az eredeti egyenlet szerint $0 < x < \frac{3}{2012}$, valamint $0 \leqq [2012x] < 3$ alapján $f(x)$ tagjainak értéke 0, 1, 2 lehet.

Ha $f(x)$ tagjai között a darab 0, b darab 1, c darab 2 értékű tag van, akkor $a+b+c = 2012$ és $b + 2c = 2013$. 1 pont

Egyenletrendszerünk alapján $b = 2011 - 2a$, $c = a + 1$, ahol $0 < a < 2012$.

Az $ax < 1$ és $(a + 1)x \geqq 1$ feltételek alapján

(I)
$$\frac{1}{a+1} \leqq x < \frac{1}{a}.$$

A $\left[(2012 - a)x\right] = 2$ feltétel alapján pedig $(2012 - a)x \geqq 2$, ahonnan $x \geqq \dfrac{2}{2012-a}$, így pedig

(II)
$$\frac{2}{2012-a} \leqq x < \frac{1}{a}.$$
1 pont

Az egyenlőtlenség alapján $a \leqq 670$.

Mivel $(2011 - a)x < 2$, ezért $x < \dfrac{2}{2011-a}$, így

(III)
$$\frac{1}{a+1} \leqq x < \frac{2}{2011-a},$$

ahonnan $670 \leqq a$ adódik. 1 pont

Eredményeink alapján $a = 670$, $b = 671$, $c = 671$. Így pedig (I), (II), (III) alapján rendre

$$\frac{1}{671} \leqq x < \frac{1}{670},$$
$$\frac{1}{671} \leqq x < \frac{2}{1341},$$
$$\frac{1}{671} \leqq x < \frac{2}{1341} \quad \text{adódik.}$$

A rendszer megoldása $\dfrac{1}{671} \leqq x < \dfrac{2}{1341}$. 1 pont

Az $\left[\dfrac{1}{671}; \dfrac{2}{1341}\right[$ intervallumba eső valamennyi x érték megfelel a feladat feltételeinek. 1 pont

Összesen: 7 pont