**Bolyai János**
**Matematikai Társulat**

# Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
# 2012/2013-as tanév
# 2. forduló
# haladók II. kategória

**Megoldások és javítási útmutató**

**1.** Az $a$, $b$ pozitív egészek, és tudjuk, hogy $a^2+ab+b^2$ tízes számrendszerben felírva 0-ra végződik. Bizonyítsuk be, hogy legalább két nullára végződik.

**Megoldás.** Átfogalmazzuk a feladatot. Tudjuk, hogy 10 osztója az $a^2+ab+b^2$ kifejezésnek, és azt kell belátnunk, hogy $a^2+ab+b^2$ 100-zal is osztható. 1 pont

A feltétel ekvivalens azzal, hogy a kifejezés osztható 2-vel és 5-tel. Le fogjuk vezetni, hogy akkor 4-gyel és 25-tel is osztható, amiből már következik a bizonyítandó állítás. 1 pont

Először vizsgáljuk a 2-vel való oszthatóságot. Az alábbi táblázat alapján csak akkor lesz a kifejezés páros, ha $a$ és $b$ is páros.

| $a$ | $b$ | $a^2+ab+b^2$ 2-es maradékai |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

Tehát $a$ és $b$ is páros. Ebből viszont az következik, hogy $a^2$, $b^2$ és $ab$ is osztható 4-gyel, vagyis kifejezésünk is osztható 4-gyel. 2 pont

Most megnézzük az 5-tel való oszthatóságot.

| $a^2$ | $b^2$ | $ab$ | $a^2+ab+b^2$ 5-ös maradékai |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1; 4 | 0 | 1; 4 |
| 1; 4 | 0 | 0 | 1; 4 |
| 1 | 1 | 1; 4 | 3; 1 |
| 1 | 4 | 2; 3 | 2; 3 |
| 4 | 1 | 2; 3 | 2; 3 |
| 4 | 4 | 1; 4 | 4; 2 |

(A táblázat ötödik sora például azt mutatja, hogy ha $a^2$ 1 maradékot ad 5-tel osztva, akkor $a$ 1 vagy 4 maradékot ad, és ha $b^2$ maradéka 4, akkor $b$ maradéka 2 vagy 3. Ezeket minden lehetséges párosításban összeszorozva $ab$-re az $1\cdot 2=2$, $1\cdot 3=3$, $4\cdot 2=8$, $4\cdot 3=12$ vagyis a 2 és 3 lehetséges maradékokat kapjuk.) 2 pont

Az előzőekhez hasonlóan csak akkor lesz $a^2 + ab + b^2$ 5-tel oszható, ha $a$ és $b$ is az, de ebben az esetben $a^2$, $ab$ és $b^2$ (tehát összegük is) 25-tel is osztható. 1 pont

Ha pedig egy egész 4-gyel és 25-tel is osztható, akkor 100-zal is, így tízes számrendszerben felírt alakja legalább két nullára végződik.

---

Összesen: 7 pont

**2.** Adott a síkon 6 pont, közülük semelyik három nincs egy egyenesen. Bizonyítsuk be, hogy található közöttük három, amelyek által meghatározott háromszögnek van egy legalább $120^\circ$-os szöge.

**Megoldás.** Képezzük az adott pontok konvex burkát, azaz azt a legszűkebb konvex sokszöget, melynek csúcsai az adott pontok közül valók, és tartalmazza az adott pontokat. 1 pont

Ha a konvex burok hatszög:

Nem lehet a hatszög minden szöge kisebb, mint $120^\circ$, mert a hatszög belső szögeinek összege $720^\circ$. 1 pont

Ezért a hatszögnek van legalább $120^\circ$-os szöge, ami a konvexitás miatt kisebb, mint $180^\circ$. Tehát ez a szög szöge egy olyan háromszögnek, melynek csúcsai az adott pontok közül valók, így az állítás teljesül. 1 pont

Ha a konvex burok ötszög, négyszög, vagy háromszög:

Ekkor van olyan pont, ami a konvex burok belsejében van (hiszen a pontok között nincs három, amelyek egy egyenesre illeszkednének), legyen ez a pont $A$. 1 pont

A konvex sokszöget az egyik csúcsából induló átlói háromszögekre bontják, tekintsük azt a $BCD$ háromszöget, amely belsejében van az $A$ pont. 2 pont

A $BAD$, $CAD$, $DAB$ szögek összege $360^\circ$, ezért van közöttük olyan, amelyik legalább $120^\circ$, és az itt keletkező háromszög eleget tesz a feltételeknek, így az állítás teljesül. 1 pont

---

Összesen: 7 pont

**3.** Nyolc darab pozitív egész szám összege és szorzata ugyanannyit ér. Mekkora ez a közös érték?

**Megoldás.** Feltehetjük, hogy $1 \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq x_3 \leqq \ldots \leqq x_8$ a nyolc szám nagyság szerinti sorrendje.

Az $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_8 = x_1 x_2 x_3 \cdot \ldots \cdot x_8$ egyenlet oldalait $x_8$-cal osztva

$$\frac{x_1}{x_8} + \frac{x_2}{x_8} + \frac{x_3}{x_8} + \ldots + \frac{x_7}{x_8} + 1 = x_1 x_2 x_3 \cdot \ldots \cdot x_7$$

adódik.

Mivel

$$\frac{x_1}{x_8} \leqq \frac{x_2}{x_8} \leqq \ldots \leqq \frac{x_7}{x_8} \leqq 1,$$

ezért $8 \geqq x_1 x_2 x_3 \cdot \ldots \cdot x_7$. 1 pont

Nyilvánvaló, hogy $x_7 \geqq 2$, így $x_8 \geqq x_7 \geqq 2$, ezért $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$, hiszen $x_4 \geqq 2$ esetén a szorzat értéke legalább 16.

Tehát $4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = x_5 x_6 x_7 x_8$. Így pedig

$$x_5 x_6 x_7 = \frac{4}{x_8} + \frac{x_5}{x_8} + \frac{x_6}{x_8} + \frac{x_7}{x_8} + 1 \leqq 6,$$

hiszen $x_8 \geqq x_7 \geqq 2$. 1 pont

Az $x_5 x_6 x_7 \leqq 6$ egyenlőtlenség alapján $x_5$ értéke csak 1 lehet. Így pedig $x_6 x_7 \leqq 6$, ezért $x_6$ értéke 1 vagy 2. 1 pont

Ha $x_6 = 1$, akkor $6 + x_7 + x_8 = x_7 x_8$, ahonnan

$$x_8 = \frac{x_7 + 6}{x_7 - 1} = 1 + \frac{7}{x_7 - 1}, \quad \text{azaz} \quad (x_7 - 1)(x_8 - 1) = 7.$$

Az egyenlet egyetlen megoldása $x_7 = 2$, $x_8 = 8$, ekkor pedig

$$x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_8 = x_1 + x_2 + \ldots + x_8 = 16.$$ 1 pont

Ha $x_6 = 2$, akkor $7 + x_7 + x_8 = 2x_7 x_8$ alapján

$$x_8 = \frac{x_7 + 7}{2x_7 - 1} \geqq x_7,$$

ahonnan $(2x_7 - 1)(2x_8 - 1) = 15$ adódik. 1 pont

Egyenletünk megoldása $x_7 = 2$, $x_8 = 3$. 1 pont

Ebben az esetben a szorzat és az összeg közös értéke 12.

A közös érték tehát 16 vagy 12, ahol mindkét érték megfelel a feladat feltételeinek. 1 pont

---

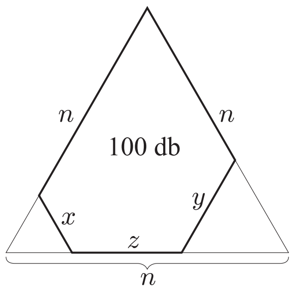
Összesen: 7 pont

**4.** Egy konvex ötszög pontosan 100 darab egységnyi oldalú egybevágó szabályos háromszögből rakható ki (hézag- és átfedés nélkül). Mekkora lehet az ötszög kerülete?

**Megoldás.**

Egybevágó szabályos háromszögekből egy újabb szabályos háromszöget csak négyzetszám számú darabból lehet kirakni. Esetünkben egy $n$ oldalú szabályos háromszög $n^2$ egységnyi oldalú kis háromszögből állhat. 1 pont

A feladat feltételeinek megfelelő ötszög az alábbi ábra szerint kiegészíthető egy $n$ oldalú szabályos háromszögre:




Ha például $x \leqq y$, akkor $1 \leqq x \leqq y < n$, $n = x + y + z$ az ötszög létrejöttének feltétele, ahol $z \geqq 1$.

Bevezető megállapításunk alapján

$$(x + y + 1)^2 - x^2 - y^2 \leqq (x + y + z)^2 - x^2 - y^2 = 100.$$

A felírt egyenlőtlenség rendezett alakja

$$2x + 2y + 2xy \leqq 99.$$ 1 pont

Ha $x \leqq y$, akkor $4x + 2x^2 \leqq 99$, azaz $x^2 + 2x \leqq 49{,}5$, ahonnan $x \leqq 6$ következik. 1 pont

Mivel $n^2 - x^2 - y^2 = 100$, ezért

(1) $x = 1$ esetén $n^2 - y^2 = 101$, így $n - y = 1$, $n + y = 101$, ahonnan $n = 51$, $y = 50$ nem ad megoldást.

(2) $x = 2$ esetén $n^2 - y^2 = 104$, ezért $n - y = 2$, $n + y = 52$ vagy $n - y = 4$, $n + y = 26$ lehetséges.

Az első esetben $n = 27$, $y = 25$, ami nem ad megoldást.

A második esetben $n = 15$, $y = 11$. Ekkor $x = 2$, $y = 11$, $z = 2$, a másik két oldal pedig 4, illetve 13 egység hosszú. Az ötszög kerülete pedig 32 egységnyi. 2 pont

(3) Az $x = 3$, $x = 4$, $x = 5$, $x = 6$ esetekben rendre $n^2 - y^2 = 109$, $n^2 - y^2 = 116$, $n^2 - y^2 = 125$, $n^2 - y^2 = 136$ adódik.

Az $n^2 - y^2 = (n - y)(n + y)$ azonosság alapján $n - y < n + y$ felhasználásával a felsorolásnak megfelelően az

$$\left.\begin{array}{l} n - y = 1 \\ n + y = 109 \end{array}\right\}, \qquad \left.\begin{array}{l} n - y = 2 \\ n + y = 58 \end{array}\right\}, \qquad \left.\begin{array}{l} n - y = 1 \\ n + y = 125 \end{array}\right\},$$

$$\left.\begin{array}{l} n - y = 5 \\ n + y = 25 \end{array}\right\}, \qquad \left.\begin{array}{l} n - y = 2 \\ n + y = 68 \end{array}\right\}, \qquad \left.\begin{array}{l} n - y = 4 \\ n + y = 34 \end{array}\right\}$$

egyenletrendszerek adódnak, felhasználva azt is, hogy $n - y$ és $n + y$ azonos paritásúak.

A felírt egyenletrendszerek egyikének sincs a feladat feltételeinek megfelelő megoldása. 2 pont

Tehát az ötszög kerülete csak 32 egység hosszú lehet.

---

Összesen: 7 pont