Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2012/2013-as tanév
első (iskolai) forduló
haladók – II. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. A „23-as szám” című misztikus filmben az egyik szereplő a házszámukat nagyon különlegesnek találja. A ház száma 1814, és az alábbi misztikus tulajdonságokat fedezi fel benne:

(1) ha az első két számjegyhez hozzáadjuk a második kettőből képzett kétjegyű számot, akkor $1 + 8 + 14 = 23$-at kapunk;

(2) ha az első két számjegyből képzett kétjegyű számhoz hozzáadjuk a másik két számjegyet, akkor $18 + 1 + 4 = 23$-at kapunk ismét;

(3) ha a két kétjegyű számot adjuk össze, akkor $18 + 14 = 32$-őt kapunk, ami épp a 23 fordított sorrendben leírva.

Tényleg különleges ebből a szempontból az 1814? Vagyis hány olyan négyjegyű szám van, amelyik rendelkezik a fenti három tulajdonság mindegyikével?

Megoldás. Tekintsük az $\overline{abcd}$, négyjegyű számot, $a \neq 0$, és a, b, c, d számjegyek.

(1) és (2) miatt $a + b + 10c + d = 10a + b + c + d = 23$, ahonnan $a = c$. 2 pont

(3) miatt $20a + b + d = 32$, azaz $a = c = 1$, hiszen $a \geqq 2$ esetén az egyenlőség bal oldala legalább 40 lenne. 1 pont

Mivel $11 + b + d = 23$, $b + d = 12$, azaz a második és a negyedik számjegy összege 12. 1 pont

Ez az alábbi számok esetén teljesül: 1319, 1418, 1517, 1616, 1715, 1814, 1913, 2 pont
tehát 7, a feltételeknek megfelelő négyjegyű szám van, azaz az 1814 nem is olyan különleges. 1 pont

---

Összesen: 7 pont

2. Határozzuk meg az A szám pozitív egész osztóinak számát, ahol:

$$A = \sqrt{1 + 2011 \cdot \sqrt{1 + 2012 \cdot \sqrt{1 + 2013 \cdot \sqrt{1 + 2014 \cdot 2016}}}}.$$

Megoldás. Vizsgáljuk az $\sqrt{1 + 2014 \cdot 2016}$ értékét.

$\sqrt{1 + 2014 \cdot 2016} = \sqrt{1 + (2015 - 1) \cdot (2015 + 1)} = \sqrt{1 + 2015^2 - 1} = \sqrt{2015^2} = 2015.$ 3 pont

Ekkor az $A = \sqrt{1 + 2011 \cdot \sqrt{1 + 2012 \cdot \sqrt{1 + 2013 \cdot 2015}}}$.

Az előző gondolatmenet alapján

$$A = \sqrt{1 + 2011 \cdot \sqrt{1 + 2012 \cdot 2014}} = \sqrt{1 + 2011 \cdot 2013} = \sqrt{1 + 2012^2 - 1} = 2012.$$ 2 pont

$2012 = 2^2 \cdot 503.$ 1 pont

Osztók száma: $(2 + 1) \cdot (1 + 1) = 6.$ 1 pont

Összesen: 7 pont

3. Egy sík 20 darab egyenese összesen 187 darab metszéspontot határoz meg. Igazoljuk, hogy az egyenesek között vannak párhuzamosak.

Megoldás. A sík 20 darab egyenese legfeljebb $\frac{20 \cdot 19}{2} = 190$ darab metszéspontot határoz meg, ha bármely két egyenes metszi egymást. 1 pont

Ha az egyenesek között nem lennének párhuzamosak, akkor a 187 metszéspont eléréséhez legalább 3 egyenesnek egy pontban kell metszenie egymást. 1 pont

Amennyiben legalább négy egyenes metszi egymást egy pontban, akkor a metszéspontok maximális száma 185, hiszen 4 darab általános helyzetű egyenes 6 metszéspontot határoz meg, így az összes metszéspont száma legfeljebb $190 - 5 = 185$. 1 pont

Tehát párhuzamosság nélkül legfeljebb „hármas csomópontok” jöhetnek létre.

Ha pontosan 1 darab hármas csomópont van, akkor a metszéspontok száma (párhuzamosság nélkül) $190 - 2 = 188$. 1 pont

Ha pontosan 2 darab hármas csomópont van, akkor az összes csomópont száma

$$190 - 2 - 2 = 186.$$ 1 pont

Ha még több hármas csomópont lenne, akkor a metszéspontok száma még kisebb lenne.

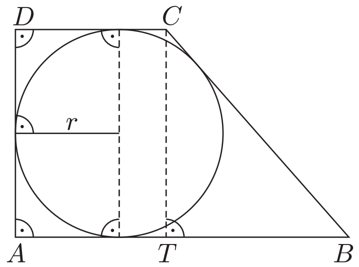
Tehát az egyenesek között vannak párhuzamosak is. 1 pont

A 187 metszéspont megvalósítható például úgy, hogy veszünk 3 darab párhuzamos egyenest és 17 darab általános helyzetű egyenest a felvett három egyeneshez képest. 1 pont

Összesen: 7 pont

4. Egy t területű derékszögű trapézba az oldalakat érintő r sugarú kör írható, ahol $t = \dfrac{25}{4}\, r^2$. Mekkora a trapéz alapjainak aránya?

Megoldás. Legyen – ábránknak megfelelően – a trapéz két párhuzamos oldala x és y, ahol például $x \geqq y$.



$$AD = TC = 2r, \quad AB = x, \quad DC = y.$$

Az érintőnégyszögek tétele alapján $BC = x + y - 2r$. 1 pont

A $t = \dfrac{x+y}{2} \cdot 2r = \dfrac{25}{4}\, r^2$ feltétel szerint pedig $x + y = \dfrac{25}{4}\, r$. 1 pont

A CTB derékszögű háromszögre Pitagorasz tételét alkalmazva

$$(2r)^2 + (x-y)^2 = \big((x+y) - 2r\big)^2,$$

hiszen $TB = x - y$ és $BC = x + y - 2r$. 1 pont

Mivel $x + y = \dfrac{25}{4}\, r$, ezért

$$(x-y)^2 = \left(\frac{25}{4}\, r - 2r\right)^2 - 4r^2 = \frac{225}{16}\, r^2,$$

így pedig $x - y = \dfrac{15}{4}\, r$. 1 pont

Az $x - y = \dfrac{15}{4}\, r$, $x + y = \dfrac{25}{4}\, r$ egyenletrendszer alapján a megfelelő oldalak összeadásával, illetve kivonásával $x = 5r$, $y = \dfrac{5}{4}\, r$ adódik. 2 pont

Így pedig $\dfrac{x}{y} = 4$, vagy $\dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{4}$. 1 pont

Összesen: 7 pont

5. Van 2012 darab számunk $a_1, a_2, \ldots, a_{2011}, a_{2012}$ mindegyik $\sqrt{2}+1$, vagy $\sqrt{2}-1$.

Képezzük a következő összeget:

$$S = a_1a_2 + a_3a_4 + a_5a_6 + \ldots + a_{2011}a_{2012}.$$

Lehet-e $S = 2012$?

Megoldás. Ha egyetlen a_ia_{i+1} alakú tagot veszünk az S-ből (ami egy 1006 tagú összeg), akkor az a_ia_{i+1} tag háromféle értéket vehet fel:

$$\begin{aligned} &\text{Vagy} \quad a_ia_{i+1} = \big(\sqrt{2}+1\big)\big(\sqrt{2}-1\big) = \big(\sqrt{2}-1\big)\big(\sqrt{2}+1\big) = 1, \\ &\text{vagy} \quad a_ia_{i+1} = \big(\sqrt{2}+1\big)\big(\sqrt{2}+1\big) = 3+2\sqrt{2}, \\ &\text{vagy} \quad a_ia_{i+1} = \big(\sqrt{2}-1\big)\big(\sqrt{2}-1\big) = 3-2\sqrt{2}. \end{aligned}$$ 2 pont

Legyen az első típusú tagokból a, a második típusúakból b, a harmadik típusúakból c darab az 1006 tag között! (a, b, c természetesen nemnegatív egészek!)

Ekkor

(I) $$S = 1\cdot a + \big(3+2\sqrt{2}\,\big)b + \big(3-2\sqrt{2}\,\big)c = a + 3(b+c) + \sqrt{2}(2b-2c).$$ 1 pont

S csak úgy lehet egész (mivel a, b, c egész), ha $\sqrt{2}(2b-2c)$ is egész.

Ez azt jelenti (mivel $\sqrt{2}$ irracionális), hogy $2b-2c=0$, hiszen „racionális $\cdot$ irracionális” kéttényezős szorzat akkor, és csak akkor lehet racionális, ha a racionális tényező 0.

Innen $b = c$. 1 pont

Mivel az S-beli tagok számára:

(II) $$1006 = a + b + c = a + 2b,$$ 1 pont

és ha azt szeretnénk, hogy $S = 2012$ legyen, akkor a következő egyenlőség is teljesül:

(III) $$2012 = S = a + 3(b+c) = a + 6b.$$

Most vonjuk ki (III)-ból a (II) egyenletet!

Adódik: $1006 = 4b$.

Ez viszont lehetetlen, hiszen b egész szám (és 1006 nem osztható 4-gyel)! 1 pont

Vagyis nem lehet az S összeg 2012! 1 pont

Összesen: 7 pont

Megjegyzés:

A vonal alatti rész természetesen más módon is bizonyítható. Egy tipikus jó bizonyítás vázlata:

(Ha így gondolkodott a diák, természetesen jár erre a részre a 3 részpont!)

A legkisebb elérhető egészt úgy kapjuk meg, ha minden $a_i a_{i+1}$ tag értéke pontosan 1.

Ekkor $S = 1006$.

Úgy kaphatunk ennél nagyobb egészeket, hogy kettő „1-típusú" tagot kicserélünk egyetlen $a_i a_{i+1} = 3 + 2\sqrt{2}$, és egyetlen $a_i a_{i+1} = 3 - 2\sqrt{2}$ típusú tagra.

Ezzel éppen 4-gyel növeltük az összeget.

Vagyis 1006, és $1006 + 503 \cdot 4$ között éppen az $1006 + 4 \cdot n$ alakú számokat kaphatjuk csak meg, de ezek között nincs ott a 2012!