Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2012/2013-as tanév
2. forduló
haladók I. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Milyen a, b, c, d számjegyekre igaz, hogy $\left(\overline{ab}+\overline{cd}\right)\cdot 61=\overline{abcd}$?

Megoldás. Vezessük be az $x=\overline{ab}$ és az $y=\overline{cd}$ új ismeretleneket. Így egyenletünk az alábbi alakú:

$$(x+y)\cdot 61=\overline{xy},$$

$$61x+61y=100x+y. \qquad \text{1 pont}$$

$$60y=39x,$$

$$20y=13x. \qquad \text{1 pont}$$

Mivel a 20 és a 13 relatív prímek, 1 pont
ezért szükséges, hogy x 20 többszöröse legyen, 1 pont
és y 13 többszöröse legyen. 1 pont

Azaz az alábbi táblázatban szereplő (x,y) számpárokat, és a nekik megfelelő (a,b,c,d) számjegyeket, valamint $\overline{abcd}$ számokat kapjuk:

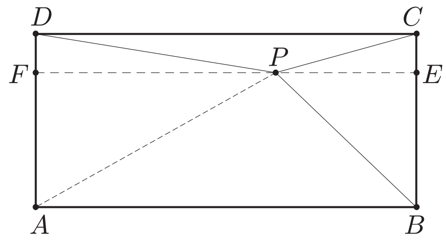
x	y	a	b	c	d	$\overline{abcd}$
20	13	2	0	1	3	2013
40	26	4	0	2	6	4026
60	39	6	0	3	9	6039
80	52	8	0	5	2	8052

2 pont

Összesen: 7 pont

2. Vegyünk fel az $ABCD$téglalap belsejében egy P pontot úgy, hogy $PB = 4$, $PC = 3$ és $PD = 5$ legyen. Mekkora PA?

Megoldás. Húzzunk P-n keresztül párhuzamost AB-vel. Ez az AD oldalt F, BC oldalt E pontban metszi.



Írjuk fel a Pitagorasz-tételt a PEB és PEC háromszögekre:

$$PB^2 = PE^2 + EB^2$$
$$PC^2 = PE^2 + EC^2. \qquad \text{1 pont}$$

Képezzük a $PB^2 - PC^2$ különbséget:

$$PB^2 - PC^2 = \left(PE^2 + EB^2\right) - \left(PE^2 + EC^2\right) = EB^2 - EC^2,$$
$$(i) \qquad PB^2 - PC^2 = EB^2 - EC^2. \qquad \text{1 pont}$$

Írjuk fel a Pitagorasz tételt a FAP és FDP háromszögekre:

$$PA^2 = PF^2 + FA^2,$$
$$PD^2 = PF^2 + FD^2. \qquad \text{1 pont}$$

Képezzük a $PA^2 - PD^2$ különbséget:

$$PA^2 - PD^2 = \left(PF^2 + FA^2\right) - \left(PF^2 + FD^2\right) = FA^2 - FD^2,$$
$$(ii) \qquad PA^2 - PD^2 = FA^2 - FD^2. \qquad \text{1 pont}$$

Mivel FE párhuzamos volt AB-vel ezért $EB = FA$ és $EC = FD$. Így (i) és (ii)-ből:

$$PB^2 - PC^2 = EB^2 - EC^2 = FA^2 - FD^2 = PA^2 - PD^2. \qquad \text{2 pont}$$

Behelyettesítve az ismert adatokat:

$$4^2 - 3^2 = PA^2 - 5^2,$$
$$PA = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}\,. \qquad \text{1 pont}$$

Összesen: 7 pont

3. Legyen a_n a következő módon definiált sorozat:

$$a_n = \begin{cases} a_1 = 18, \\ a_2 = 48, \\ a_n = a_{n-1} \cdot a_{n-2}, \quad \text{ha} \quad n > 2. \end{cases}$$

Hány négyzetszám van a sorozat tagjai között?

Megoldás. Írjuk fel az első két tag prímtényezős felbontását: $a_1 = 2^1 \cdot 3^2$, és $a_2 = 2^4 \cdot 3^1$.

Mivel az első két tagnak csak a 2, és a 3 a prímtényezői, ezért az összes többi tag prímfelbontásában is csak ez a két szám szerepelhet. 1 pont

Egy (1-nél nagyobb egész) szám pontosan akkor négyzetszám, ha prímfelbontásában minden prímtényező páros kitevővel szerepel, így ennek teljesülését fogjuk vizsgálni a_n esetén. 1 pont

A harmadik tagtól elkezdve a_n definíciója alapján az a_n prímfelbontásában szereplő 2-esek száma az előző két tag prímfelbontásaiban szereplő 2-esek számának összege (a 3-as prímtényezőkre hasonlóan). 1 pont

Így ha külön-külön vizsgáljuk az

a_n prímfelbontásában szereplő 2-esek számát (k_n-nel jelöljük), illetve

a_n prímfelbontásában szereplő 3-asok számát (h_n-nel jelöljük),

akkor két Fibonacci-szerű sorozatot kapunk. 1 pont

A k_n $(1, 4, 5, 9, 14, 23, \ldots)$ sorozat paritását vizsgálva adódik, hogy minden $n = 3k + 2$ indexű tag lesz csak páros, a többi páratlan, míg
a h_n $(2, 1, 3, 4, 7, 11, \ldots)$ sorozat minden $n = 3k + 1$ indexű tagja lesz csak páros, a többi páratlan. 2 pont

Vagyis k_n és h_n azonos n-re nem lehet egyszerre páros, így a_n prímfelbontásában valamelyik prímtényező páratlan kitevővel szerepel.

Így az a_n sorozat tagjai között nem lehet négyzetszám. 1 pont

Összesen: 7 pont

4. Adott 50 szám, melyek összege 100. Bizonyítsuk be, hogy a számok közül kiválasztható 3 úgy, hogy az összegük legalább 6 legyen.

Megoldás. Képezzük az alábbi 3 tagú összegeket: $S_1 = a_1 + a_2 + a_3$, $S_2 = a_2 + a_3 + a_4$, $\ldots$, $S_{49} = a_{49} + a_{50} + a_1$, $S_{50} = a_{50} + a_1 + a_2$. 2 pont

Ekkor $S_1 + S_2 + \ldots + S_{50} = 3(a_1 + a_2 + \ldots + a_{50}) = 300 = 50 \cdot 6$. 2 pont

Az állítás következik abból, hogyha 50 szám összege $50 \cdot 6 = 300$, akkor nem lehet a számok mindegyike 6-nál kisebb. 3 pont

Összesen: 7 pont