Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2012/2013-as tanév
első (iskolai) forduló
haladók – I. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Keressük meg az összes olyan egymás utáni egész számokból álló számötöst, ahol az első három szám négyzetének összege egyenlő az utolsó kettő szám négyzetének összegével!

1. megoldás. Az első számot x-szel jelölve írjuk fel az öt szám négyzetének összegét:

$$x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 = (x+3)^2 + (x+4)^2.$$ 1 pont

Végezzük el a négyzetre emeléseket. Összevonás után kapjuk, hogy

$$x^2 - 8x - 20 = 0.$$ 2 pont

Oldjuk meg a másodfokú egyenletet:

I. módszer:

Alakítsuk szorzattá: $(x+2)(x-10) = 0$. 1 pont

Egy szorzat akkor nulla, ha egyik tényezője nulla. 1 pont

Azaz a másodfokú egyenletnek két gyöke van: az $x_1 = 10$ és az $x_2 = -2$. 1 pont

Ezért a feladatot a $\{10, 11, 12, 13, 14\}$ és a $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ számötösök elégíti ki. 1 pont

II. módszer:

Alakítsuk át az $x^2 - 8x - 20 = 0$ egyenletet teljes négyzetté kiegészítéssel.

$$(x-4)^2 = 36.$$ 1 pont

Az egyenlet bal oldalán egy teljes négyzet van, a jobb oldalán egy négyzetszám. Így a fenti egyenlet igaz lesz, ha $x - 4 = 6$ vagy ha $x - 4 = -6$. 1 pont

Azaz a másodfokú egyenletnek két gyöke van: az $x_1 = 10$ és az $x_2 = -2$. 1 pont

Ezért a feladatot a $\{10, 11, 12, 13, 14\}$ és a $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ számötösök elégítik ki. 1 pont

III. módszer:

Oldjuk meg az $x^2 - 8x - 20 = 0$ másodfokú egyenletet a másodfokú egyenlet megoldóképletének segítségével:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 80}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{144}}{2} = \frac{8 \pm 12}{2} = 4 \pm 6.$$ 2 pont

Azaz a másodfokú egyenletnek két gyöke van: az $x_1 = 10$ és az $x_2 = -2$. 1 pont

Ezért a feladatot a $\{10, 11, 12, 13, 14\}$ és a $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ számötösök elégítik ki. 1 pont

Összesen: 7 pont

2. megoldás. A középső számot x-szel jelölve írjuk fel az öt szám négyzetének összegét:

$$(x-2)^2 + (x-1)^2 + x^2 = (x+1)^2 + (x+2)^2. \qquad \text{1 pont}$$

Végezzük el a négyzetre emeléseket. Összevonás után kapjuk, hogy

$$x^2 - 12x = 0. \qquad \text{2 pont}$$

Oldjuk meg a másodfokú egyenletet:

I. módszer:

Alakítsuk szorzattá: $x(x-12) = 0$. 1 pont

Egy szorzat akkor nulla, ha egyik tagja nulla. 1 pont

Azaz a másodfokú egyenletnek két gyöke van: az $x_1 = 0$ és az $x_2 = 12$. 1 pont

Ezért a feladatot a $\{10, 11, 12, 13, 14\}$ és a $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ számötösök elégítik ki. 1 pont

II. módszer:

Alakítsuk át az$x^2 - 12x = 0$ egyenletet teljes négyzetté kiegészítéssel.

$$(x-6)^2 = 36. \qquad \text{1 pont}$$

Az egyenlet bal oldalán egy teljes négyzet van, a jobb oldalán egy négyzetszám. Így a fenti egyenlet igaz lesz, ha $x - 6 = 6$ vagy ha $x - 6 = -6$. 1 pont

Azaz a másodfokú egyenletnek két gyöke van: az $x_1 = 0$ és az $x_2 = 12$. 1 pont

Ezért a feladatot a $\{10, 11, 12, 13, 14\}$ és a $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ számötösök elégítik ki. 1 pont

III. módszer:

Oldjuk meg az $x^2 - 12x = 0$ másodfokú egyenletet a másodfokú egyenlet megoldóképletének segítségével:

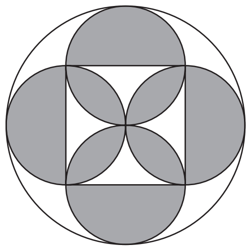
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 0}}{2} = \frac{12 \pm \sqrt{144}}{2} = \frac{12 \pm 12}{2} = 6 \pm 6. \qquad \text{2 pont}$$

Azaz a másodfokú egyenletnek két gyöke van: az $x_1 = 0$ és az $x_2 = 12$. 1 pont

Ezért a feladatot a $\{10, 11, 12, 13, 14\}$ és a $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ számötösök elégítik ki. 1 pont

Összesen: 7 pont

2. Egy $2r$ sugarú körbe r sugarú köröket rajzolunk az ábra szerint. Hanyadrésze a fehéren maradt területek összege a középen kialakuló négyzet területének?



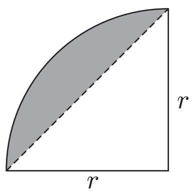
Megoldás. A nagy kör sugara $2r$. Így a területe $T_{\text{nagykör}} = 4r^2\pi$. 1 pont

A középen kialakuló kis négyzet oldala a kis kör átmérője, azaz $2r$. Így a kis négyzet területe

$$T_{\text{négyzet}} = 4r^2.$$ 1 pont

A színezett részek területe 4 kis félkör területének és középen 4 íves tartomány területének összege. 1 pont

A kis félkörök területének összege $T_{\text{félkörök}} = 4 \cdot \dfrac{r^2\pi}{2}$. 1 pont



A középen lévő négy íves rész területének fele megkapható, ha egy negyed kis kör területéből kivonunk egy r befogókkal rendelkező egyenlőszárú derékszögű háromszög területét. 1 pont

$$\frac{1}{2} \cdot T_{\text{íves}} = \frac{r^2\pi}{4} - \frac{r \cdot r}{2}.$$ 1 pont

Így a fehéren maradt területek összegét megkapjuk, ha a nagy kör területéből levonjuk a 4 félkör, és a négy íves rész területének összegét:

$$T_{\text{fehér}} = T_{\text{nagykör}} - T_{\text{félkörök}} - 4 \cdot T_{\text{íves}} = 4r^2\pi - 4 \cdot \frac{r^2\pi}{2} - 8 \cdot \left(\frac{r^2\pi}{4} - \frac{r \cdot r}{2}\right) =$$

$$= 4r^2\pi - 2r^2\pi - 2r^2\pi + 4r^2 = 4r^2.$$

Azaz a fehéren maradt területek összege a kis négyzet területével egyezik meg. 1 pont

Összesen: 7 pont

3. Melyek azok az N pozitív egész számok, amelyeknek prímtényezős felbontásában csak a 2 és a 3 hatványai szerepelnek, és N összes osztójának a száma harmadrésze N^2 osztói számának?

Megoldás. Ha $N = 2^p 3^q$, akkor N osztóinak száma: $(p+1)(q+1)$, N^2 osztóinak száma $(2p+1)(2q+1)$, ahol p és q pozitív egészek. A feltétel szerint:

$$(2p+1)(2q+1) = 3(p+1)(q+1).$$ 1 pont

A zárójelek felbontása és rendezés után $q = \dfrac{p+2}{p-1} = 1 + \dfrac{3}{p-1}$. (1 pont a jó rendezésért, 1 pont az egész leválasztásért vagy más, a továbbiakat indokoló lépésért.) 2 pont

Akkor kapunk csak egészet, ha $p-1$ osztója 3-nak, vagyis $p-1=1$ vagy 3. 1 pont

A lehetséges megoldások: $p=2$, $q=4$-ből $N = 2^2 3^4$ $(=144)$, illetve $p=4$, $q=2$-ből $N = 2^4 3^2$ $(=324)$. 2 pont

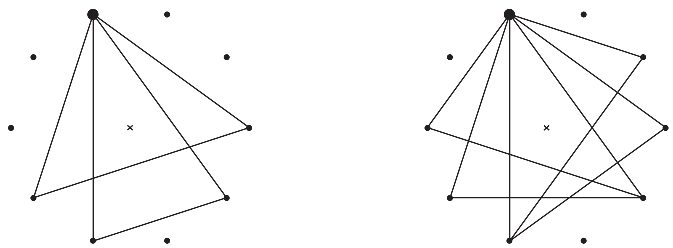
A kapott számok megfelelnek a feltételeknek (ellenőrzés). 1 pont

Összesen: 7 pont

4. Adott a síkon tíz pont, egy szabályos tízszög csúcsai. Hányféle módon választhatók ki ezen pontok közül egy olyan háromszög csúcsai, amely belsejében tartalmazza a tízszög középpontját?

Megoldás. Nevezzük „jó”-nak azokat a háromszögeket, amelyek belsejükben tartalmazzák a sokszög középpontját. A szabályos tízszög leghosszabb átlói átmennek a középponton, tehát ezek nem lehetnek jó háromszög oldalai. 1 pont

Jelöljük ki a tízszög egyik csúcsát, és számoljuk meg először az olyan jó háromszögeket, amelyeknek ez a kijelölt pont az egyik csúcsa.



Az előző észrevétel és egy ábra alapján adódik, hogy 6 ilyen jó háromszög van. 3 pont

A kiválasztott pont 10-féle lehet, de minden jó háromszöget háromszor számoltunk, a három csúcsánál.

Tehát összesen $\dfrac{6 \cdot 10}{3} = 20$ megfelelő háromszög választható ki a szabályos tízszög csúcsai közül. 3 pont

Összesen: 7 pont

5. Egy k-szor n-es sakktábla ($k > 1$, $n > 1$) mindegyik mezőjén áll egy figura. Egy adott jelre mindegyik figura egy, a saját mezőjével élben szomszédos valamelyik mezőre lép. Ha $k + n = 2012$, akkor hány darab $(k; n)$ számpár esetén lehetséges, hogy a lépések után mindegyik mezőn legyen figura?

Megoldás. Ha k és n is páratlan szám, akkor a szokásos fekete-fehér színezés esetén valamelyik színű mezőből 1-gyel több van, mint a másikból. 1 pont

Ha például a fehér színű mezők száma nagyobb, akkor a fehér mezőn álló figurák csak fekete színű mezőre léphetnek, ezért valamelyik fekete színű mezőn legalább két figurának kell állnia a lépések után. 1 pont

Tehát k és n értéke egyszerre nem lehet páratlan, ha a lépések után mindegyik mezőn van figura. 1 pont

Mivel $k + n = 2012$ páros szám, így k és n értéke is – a feltételek teljesülése esetén – csak páros szám lehet. 1 pont

A $(k; n)$ számpárokban így k értéke 2, 4, 6, 8, $\ldots$, 2010 lehet. Ekkor a lehetséges megfelelő számpárok száma 1005. 1 pont

Mind az 1005 darab számpár esetén megvalósítható a feladat feltétele, például úgy, hogy minden egyes sorban a páronként szomszédos mezőkön álló figurák helyet cserélnek az adott jelre. 2 pont

Összesen: 7 pont