Bolyai János
Matematikai Társulat

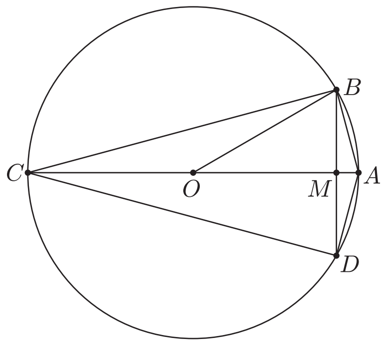
Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2011/2012-es tanév
kezdők I–II. kategória II. forduló
kezdők III. kategória I. forduló

Megoldások és javítási útmutató

1. Mekkorák annak a deltoidnak a szögei, amelynek van körülírt köre, és az egyik átlója kétszer olyan hosszú, mint a másik? (6 pont)

Megoldás.

A deltoid tengelyes szimmetriája miatt a körülírt kör O középpontja rajta van a szimmetriaátlón (a szimmetriaátlóra való tükrözéskor a körülírt kör önmagába megy át). Így a szimmetriaátló a kör átmérője, és mivel a másik átló is a kör egy húrja, ezért csak az lehet a rövidebb, tehát a szimmetriaátló a hosszabbik átló. 1 pont



Ezért Thalész tételének értelmében a deltoid rövidebb átlójának két végpontjánál (az ábrán a B és a D csúcsoknál) 90°–90°-os szögek vannak. 1 pont

A feltétel szerint $2BD = AC$, vagyis BD ugyanakkora, mint a kör sugara. Ekkor az OBD háromszög szabályos, így (az átlók metszéspontját M-mel jelölve) $OBD\sphericalangle = OBM\sphericalangle = 60°$, tehát $BOM\sphericalangle = BOA\sphericalangle = 30°$. 2 pont

Mivel a BOA háromszög egyenlő szárú ($OA = OB$), ezért $OAB\sphericalangle = \dfrac{180° - 30°}{2} = 75°$.

A szimmetria miatt ekkor A-nál kétszer ekkora szög van, tehát: $DAB\sphericalangle = 150°$. 1 pont

Ekkor $BCD\sphericalangle = 30°$. 1 pont

Megjegyzés. Az OBD háromszög szabályossága helyett észre lehet venni az OBM háromszög félszabályosságát (90°, 60°, 30°-os szögek). Ebből is adódik, hogy $BOM\sphericalangle = BOA\sphericalangle = 30°$. Természetesen erre is jár a 2 pont. A befejezésnél a C-nél levő szöget is megkaphatjuk először a középponti és kerületi szögek tételével vagy közvetlen számolással, majd onnan az A-nál levőt. Ebben a sorrendben is jár az 1–1 pont.

2. Határozza meg azt a legkisebb n pozitív egész számot, amelyre igaz, hogy n egymást követő kétjegyű szám között mindig van olyan, amelyik osztható a számjegyeinek összegével. (6 pont)

1. megoldás.

Megmutatjuk, hogy $n = 10$. Vegyük észre, hogy n legfeljebb 10. Valóban, 10 egymást követő szám között biztosan van 10-zel osztható és a kétjegyű 10-zel osztható számok nyilván oszthatók számjegyeik összegével. 4 pont

Másrészt n legalább 10, mivel könnyen ellenőrizhető, hogy a 91, 92, …, 99 számok között nincs olyan, amelyik osztható lenne a számjegyeinek összegével. 2 pont

2. megoldás.

10 egymást követő szám között biztosan van 9-cel osztható. 1 pont

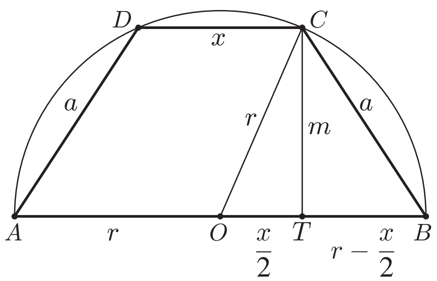
Egy 9-cel osztható szám számjegyeinek összege is osztható 9-cel, tehát egy 9-cel osztható kétjegyű szám számjegyeinek összege 9 vagy 18. 1 pont

Ha a számjegyek összege 9, akkor készen vagyunk. 1 pont

18 pedig csak úgy lehet, ha a kétjegyű szám a 99. Ekkor a 90, …, 99 számok közül a 90 osztható a számjegyeinek összegével. 1 pont

Másrészt n legalább 10, mivel könnyen ellenőrizhető, hogy a 91, 92, …, 99 számok között nincs olyan, amelyik osztható lenne a számjegyeinek összegével. 2 pont

3. Az O középpontú, $AB = 2r$ átmérőjű félkörön felvesszük egymás után a C és a D pontokat úgy, hogy az AC és a CD húrok hossza egyaránt a és a DB húr hossza x. Bizonyítsa be, hogy ha a és r mérőszáma racionális szám, akkor x mérőszáma is racionális szám! (8 pont)



1. megoldás.

A szomszédos a és x hosszúságú húrokat felcserélve az $ABCD$ szimmetrikus trapézhoz jutunk. (Egy körben azonos hosszúságú ívekhez azonos hosszúságú húrok tartoznak.) 3 pont

Ennek CT magasságát m-mel jelölve és a Pitagorasz-tételt alkalmazva

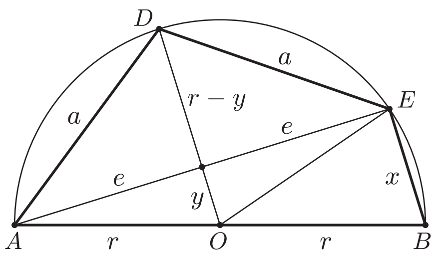
az OTC derékszögű háromszögben: $m^2 = r^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2$, 1 pont

a TBC derékszögű háromszögben: $m^2 = a^2 - \left(r - \frac{x}{2}\right)^2$. 1 pont

Az összehasonlítás alapján $r^2 - \frac{x^2}{4} = a^2 - r^2 + rx - \frac{x^2}{4}$, amiből $x = 2r - \frac{a^2}{r}$. 2 pont

Két racionális szám különbsége, szorzata és hányadosa is racionális szám, tehát ha a és r mérőszáma racionális szám, akkor x-é is az. 1 pont

2. megoldás.



Az ábra jelöléseit használva, az $AOED$ négyszög deltoid, hiszen két-két szomszédos oldala egyenlő, azaz átlói merőlegesek egymásra, és az egyik átló, az szimmetriatengely is. Legyen az OD átlónak az O-hoz közelebbi szakasza y. Ekkor a másik $r-y$. Az AE átló felét jelöljük e-vel! A Thalész-tétel szerint ABE derékszögű háromszög. A keletkező derékszögű háromszögekre Pitagorasz tételét alkalmazva:

$$a^2 = (r-y)^2 + e^2,$$
$$r^2 = y^2 + e^2,$$
$$(2r)^2 = (2e)^2 + x^2.$$

2 pont

Ha az első két egyenletet kivonjuk egymásból, majd kifejezzük y-t, a következőt kapjuk:

$$y = \frac{2r^2 - a^2}{2r}.$$

2 pont

Ezt a második egyenletbe visszahelyettesítve:

$$e^2 = r^2 - y^2 = r^2 - \frac{4r^4 - 4r^2a^2 + a^4}{4r^2} = \frac{a^2(4r^2 - a^2)}{4r^2}.$$

2 pont

Ezt a harmadik egyenletbe behelyettesítve és rendezve:

$$x^2 = \frac{4r^4 - 4a^2r^2 + a^4}{r^2} = \left(\frac{2r^2 - a^2}{r}\right)^2, \quad \text{vagyis} \quad x = \frac{2r^2 - a^2}{r} = 2r - \frac{a^2}{r}.$$

1 pont

Két racionális szám különbsége, szorzata és hányadosa is racionális szám, tehát ha a és r mérőszáma racionális szám, akkor x-é is az. 1 pont

4. Egy 4×4-es táblázat minden mezőjében kezdetben a 0 szám áll. Egy-egy lépésben a tábla valamely 2×2-es részletében a számok mindegyikét 1-gyel megnöveljük. Megkaphatjuk-e ilyen lépésekkel az alábbi kitöltéseket?

a)

3	7	6	2
8	14	10	5
8	11	9	7
3	4	5	4

b)

3	7	6	2
8	14	9	5
8	9	10	7
3	4	5	4

c)

3	7	6	2
8	14	11	5
8	11	10	7
3	4	5	4

(10 pont)

Megoldás.

a) A táblázatban a számok összege kezdetben 0, és minden lépésben 4-gyel növekszik, vagyis minden változtatás után 4-gyel osztható lesz. Mivel az első táblázatban a számok összege 106, ami 4-gyel osztva 2 maradékot ad, ezért a kívánt állapot nem valósítható meg. 2 pont

b) Színezzük ki a táblázat mezőit sakktáblaszerűen! (A bal felső mező legyen fekete.)

3	7	6	2
8	14	9	5
8	9	10	7
3	4	5	4

A táblázatban kezdetben a különböző színű mezőkön álló számok összege azonos. Minden változtatás során a fehér és fekete mezőkön álló számok összege is 2-vel nő, vagyis minden lépés után egyenlő marad a különböző színű mezőkön szereplő számok összege. Mivel a 2. ábrán a sötét mezők számainak összege 54, a világosaké pedig 50, ezért a megadott helyzet nem érhető el. 3 pont

c) Meg fogjuk mutatni, hogy a 3. ábra előállítható.

Visszafelé haladva, a táblázatban szereplő 2×2-es részletekben szereplő 1-gyel csökkentve elő fogjuk állítani a csak 0-t tartalmazó kezdőállapotot.

A sarokmezőkön lévő 3, 2, 4, 3 számok mutatják meg, hogy hány olyan változtatás történt, amely a sarkokra illeszkedő 2×2-es részleteket érintette. Ezeket a lépéseket visszavonva az alábbi ábra adódik:

0	4	4	0
5	11	9	3
5	8	6	3
0	1	1	0

A felső és az alsó sor középső két mezőjébe kerülő 4, 1 számok mutatják meg, hogy hány olyan változtatás történt, amely erre a két-két kis négyzetre illeszkedő 2×2-es részleteket érintette. Ezeket a lépéseket is visszavonva az alábbi ábra adódik:

0	0	0	0
5	7	5	3
5	7	5	3
0	0	0	0

Az első és az utolsó oszlop középső két mezőjébe kerülő 5, 3 számok mutatják meg, hogy hány olyan változtatás történt, amely erre a két-két kis négyzetre illeszkedő 2×2-es részleteket érintette. Ezeket a lépéseket is visszavonva az alábbi ábra adódik:

0	0	0	0
0	2	2	0
0	2	2	0
0	0	0	0

Végül a középső négy mezőbe kerülő 2-es számok mutatják meg, hogy hány olyan változtatás történt, amely ezt a négy kis négyzetet érintette. Ezeket a lépéseket is visszavonva adódik a csupa 0-t tartalmazó táblázat.

Tehát a felsorolt változtatások szerinti növeléseket tetszőleges sorrendben végrehajtva a $c)$ jelű táblázat előállítható. 5 pont

5. Tegyük fel, hogy p és d pozitív egész számok, amelyekre a p, $p+d$, $p+2d$, $\ldots$, $p+10d$ számok mindegyike prímszám. Bizonyítsa be, hogy ekkor d értéke legalább 210. (10 pont)

Megoldás.

Jelöljük a 2, 3, 5, 7 prímszámok halmazát P-vel! Ha $p \in P$, akkor $p+pd$ a p, $p+d$, $p+2d$, $\ldots$, $p+10d$ számok egyike, tehát prímszámnak kéne lennie, de ez nem lehet, hiszen egy p-nél nagyobb p-vel osztható szám. Tehát $p \notin P$, ami azt is jelenti, hogy a p, $p+d$, $p+2d$, $\ldots$, $p+10d$ számok egyike sem eleme P-nek. 2 pont

Ezután megmutatjuk, hogy ha $q \in P$, akkor a q prímszám osztója d-nek, tehát d osztható a P beli elemek szorzatával, azaz 210-zel. Ebből már a feladat állítása következik. 1 pont

Tekintsük a következő q darab számot: p, $p+d$, $p+2d$, $\ldots$, $p+(q-1)d$.

Ha van köztük q-val osztható, akkor van olyan k $(0 \leqq k \leqq q-1)$, hogy a $p+kd$ prímszám a q többszöröse, ami csak úgy lehet, hogy $p+kd=q$. Ez azonban az előzőek alapján nem lehet. 3 pont

Ha nincs köztük q-val osztható, akkor van köztük két olyan, amelyek q-val osztva ugyanakkora maradékot adnak, tehát a különbségük sd (ahol $1 \leqq s \leqq q-1$) osztható a q prímszámmal, tehát q osztója d-nek. 4 pont