Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2011/2012-es tanév
1. forduló
haladók III. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Bizonyítsuk be, hogy ha n természetes szám, akkor $S = \dfrac{2\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$ egész része nem lehet négyzetszám!

Megoldás.

A tört nevezőjét gyöktelenítve kapjuk, hogy $S = 2n + 2 + 2\sqrt{n(n+1)}$, 2 pont

így S egész része $2n + 2 + \left[2\sqrt{n(n+1)}\,\right]$, hiszen $2n + 2$ egész szám. 1 pont

Mivel

$$2n = 2\sqrt{n^2} < 2\sqrt{n(n+1)} = 2\sqrt{n^2+n} < 2\sqrt{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} = 2\left(n+\frac{1}{2}\right) = 2n+1,$$ 1 pont

ezért $\left[2\sqrt{n(n+1)}\,\right] = 2n$, így S egész része $4n + 2$. 1 pont

A négyzetszámok 4-gyel osztva 0, vagy 1 maradékot adhatnak, 1 pont

azaz 2-t nem, így S egész része valóban nem lehet négyzetszám. 1 pont

Összesen: 7 pont

2. Kiszámoltuk, hogy hány olyan n-jegyű ($n > 1$) szám van, ahol bármely két szomszédos jegy összege osztható 3-mal. A kapott eredmény végződhet-e 2012-re?

Megoldás.

Először megszámoljuk, hogy hány „jó” szám van n-jegyű szám esetén. Az n-jegyű számunk kezdő jegye szerint három különböző esetet különböztetünk meg ($3k + 1$, $3k + 2$, vagy $3k$ alakú a kezdő jegy).

Ha a kezdő jegy 1, 4 vagy 7 (3 eset), akkor 2, 5, vagy 8-cal folytathatjuk (újra 3 eset), majd újra 1, 4, 7-tel, … (vagyis felváltva $3k+1$, és $3k+2$ alakú számjegyek jönnek). Ez n-jegyű szám esetén éppen 3^n jó számot jelent. 1 pont

Ha a kezdő jegy 2, 5 vagy 8, akkor teljesen hasonlóan, mint az előző esetben, itt is felváltva $3k + 2$, és $3k + 1$ alakú számjegyek jönnek, vagyis n jegy esetén itt is 3^n jó szám van. 1 pont

Ha pedig a kezdő jegy 3, 6 vagy 9 ($3k$ alakú), akkor ugyanúgy $3k$ alakú számjeggyel folytathatjuk, vagyis 3, 6, 9 vagy 0-val. Itt $3 \cdot 4^{n-1}$ eset van. 1 pont

Vagyis n jegyű szám esetén a jó számok száma: $S = 2 \cdot 3^n + 3 \cdot 4^{n-1}$. 1 pont

Erről az S számról fogjuk belátni, hogy nem végződhet 2012-re!

Ugyanis, ha egy szám 2012-re végződik, akkor osztható 4-gyel. 1 pont

De $S = 2 \cdot 3^n + 3 \cdot 4^{n-1}$ és S-ben (mint kéttagú összegben) $4 \mid 3 \cdot 4^{n-1}$, ha $n > 1$, de 3^n páratlan, emiatt $2 \cdot 3^n$ 4-gyel osztva 2 maradékot ad. Így S is kettő maradékot ad 4-gyel osztva. 1 pont

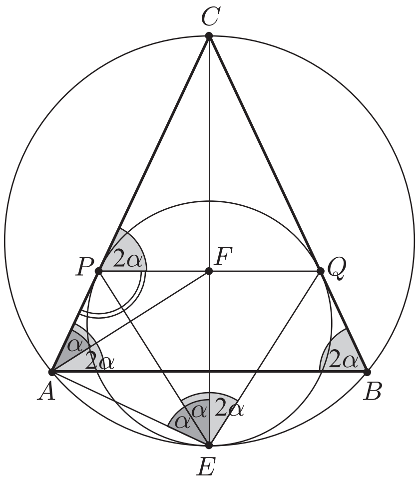
De akkor S nem osztható 4-gyel, és így nem is végződhet 2012-re. 1 pont

Összesen: 7 pont

3. Az ABC egyenlőszárú háromszög k köréírt körét belülről, a háromszög AC és BC szárait pedig rendre a P és Q pontokban érinti a k_1 kör.

Bizonyítsuk be, hogy PQ felezőpontja az ABC háromszög beírt körének középpontja!

Megoldás.



Mivel az ABC háromszög egyenlő szárú, ezért szimmetrikus CE-re.

Legyen $CAB\sphericalangle = ABC\sphericalangle = 2\alpha$. Mivel $PQ \parallel AB$-vel, ezért $CPQ\sphericalangle = 2\alpha$. 1 pont

Mivel a $CPQ\sphericalangle = 2\alpha$ a kis kör PQ húrjához húzott külső szög, ezért a PQ húrhoz húzott $PEQ\sphericalangle$ kerületi szög 2α. 1 pont

Vizsgáljuk a PFE háromszög belső szögeit. Mivel az ABC háromszög szimmetrikus CE-re, ezért $PEF\sphericalangle = FEQ\sphericalangle = \alpha$.

CE merőleges PQ-ra, ezért $EFP\sphericalangle = 90°$. Ezért a PFE háromszögben a harmadik szög $FPE\sphericalangle = 90° - \alpha$. 1 pont

Tekintsük a PEA háromszög belső szögeit!

A P pont körül $CPF\sphericalangle + FPE\sphericalangle + EPA\sphericalangle = 180°$, ezért $EPA\sphericalangle = 90° - \alpha$.

A nagy kör AC húrjához tartozó kerületi szög 2α, ezért $AEC\sphericalangle = 2\alpha$, így pedig $AEP\sphericalangle = \alpha$.

Tehát $PAE\sphericalangle = 90°$. 1 pont

Mivel a $PFEA$ négyszög szemközti szögei 180°-ra egészítik ki egymást, ezért $PFEA$ négyszög húrnégyszög. 1 pont

A $PFEA$ négyszög körülírt körének PF húrjához tartozó kerületi szög $PEF\sphericalangle = \alpha$, ezért $PAF\sphericalangle = \alpha$. 1 pont

Azaz FA a $CAB\sphericalangle$ szögfelezője. Mivel CE is felezi a $ACB\sphericalangle$ szöget, ezért ezek F metszéspontja az ABC háromszög beírt körének középpontja. 1 pont

Összesen: 7 pont

4. Az x, y, z, u valós számokra teljesül, hogy

$$4x\sqrt{4-x^2}-3y\sqrt{3-y^2}+2z\sqrt{2-z^2}-u\sqrt{1-u^2}=15.$$

Mekkora az xy^2z^2u szorzat értéke?

Megoldás.

A négyzetgyökös kifejezések csak akkor értelmezhetőek, ha $|x|\leqq 2$, $|y|\leqq\sqrt{3}$, $|z|\leqq\sqrt{2}$ és $|u|\leqq 1$. 1 pont

Mivel

$$x\sqrt{4-x^2}\leqq|x|\cdot\sqrt{4-x^2}=\sqrt{x^2(4-x^2)}\leqq\frac{x^2+4-x^2}{2}=2,$$

ezért $4x\sqrt{4-x^2}\leqq 8$ a számtani és mértani középre vonatkozó egyenlőtlenség alapján. 1 pont

Teljesen hasonló módon $y\sqrt{3-y^2}\leqq|y|\cdot\sqrt{3-y^2}=\sqrt{y^2(3-y^2)}\leqq\frac{3}{2}$.

Továbbá $z\cdot\sqrt{2-z^2}\leqq\sqrt{z^2(2-z^2)}\leqq 1$ és $u\sqrt{1-u^2}\leqq\frac{1}{2}$. 1 pont

A négy változóra felírt egyenlőtlenség esetén az egyenlőség csak az $|x|=\sqrt{2}$, $|y|=\sqrt{\frac{3}{2}}$, $|z|=1$, $|u|=\sqrt{\frac{1}{2}}$ esetben áll fenn. 1 pont

Ekkor pedig az eredeti $15=4x\sqrt{4-x^2}-3y\sqrt{3-y^2}+2z\sqrt{2-z^2}-u\sqrt{1-u^2}$ egyenlet alapján

$$15\leqq 4|x|\sqrt{4-x^2}+3|y|\sqrt{3-y^2}+2|z|\sqrt{2-z^2}+|u|\sqrt{1-u^2}\leqq$$
$$\leqq 8+3\cdot\frac{3}{2}+2\cdot 1+1\cdot\frac{1}{2}=15,$$

ezért csak $x=\sqrt{2}$, $y=-\sqrt{\frac{3}{2}}$, $z=1$, $u=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ lehetséges. 2 pont

Az xy^2z^2u szorzat értéke így $\sqrt{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot 1\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{3}{2}$. 1 pont

Összesen: 7 pont

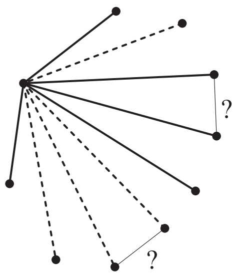
5. Felveszünk 30 különböző pontot a síkon úgy, hogy ne legyen három egy egyenesen. Minden pontot minden ponttal összekötünk, és az éleket pirossal vagy kékkel színezzük. Minden pontból pontosan 12 kék színű él indul ki, a többi pedig piros. Vizsgáljuk az így kialakult háromszögeket. Ha egy háromszög minden oldala ugyanolyan színű, akkor a belsejét is kiszínezzük.

Összesen hány háromszöget színezünk be?

Megoldás.

Jelölje x a beszínezett, y a nem beszínezett háromszögek számát.

Összesen $x + y = \dfrac{30 \cdot 29 \cdot 28}{6} = 4060$ háromszöget készíthetünk, ha a 30 pont mindegyikét minden ponttal összekötjük. 1 pont



Minden pontból pontosan 12 kék, és 17 piros él indul ki. Mivel azt nem tudjuk, hogy az adott pontból kiinduló két kék él milyen színű éllel van összekötve, ezért számoljuk meg, hogy adott pontból hány *lehetséges* egyszínű háromszög képezhető, azaz hány olyan pontkettes van, amelyeket azonos színnel kötöttünk össze. Ezekből $\dfrac{12 \cdot 11}{2}$ kék színű és $\dfrac{17 \cdot 16}{2}$ piros színű van.

Azaz összesen $\dfrac{12 \cdot 11}{2} + \dfrac{17 \cdot 16}{2} = 202$ egyszínű háromszög képzelhető el egy pontból kiindulva. 2 pont

Mind a harminc pontra ez összesen $30 \cdot \left(\dfrac{12 \cdot 11}{2} + \dfrac{17 \cdot 16}{2} \right) = 30 \cdot 202 = 6060$ háromszöget ad ki. 1 pont

Azok a háromszögek, amelyeknek minden oldala egyszínű, azokat ebben az összegben háromszor számoltuk meg, a nem egyszínű háromszögeket pedig egyszer. Azaz $3x + y = 6060$. 1 pont

Az $x + y = 4060$ és $3x + y = 6060$ egyenletrendszert x-re megoldva kapjuk, hogy $x = 1000$ olyan háromszög van, amit beszíneztünk. 1 pont

Létezik a feltételeknek megfelelő színezés. Például számozzuk be a pontokat 1-től 30-ig. A feltételnek megfelelő színezést kapunk, ha minden i. sorszámú pontot összekötünk kék színnel az $i-6$, $i-5$, $i-4$, $i-3$, $i-2$, $i-1$, $i+1$, $i+2$, $i+3$, $i+4$, $i+5$, $i+6$ (mod 30) sorszámú ponttal, a többi pontot pedig piros színnel kötjük össze. 1 pont

---

Összesen: 7 pont