Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2011/2012-es tanév
2. forduló
haladók II. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Mely x és y természetes számokra igaz, hogy $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{1000}$?

Megoldás.

Ha $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{1000}$, akkor $\sqrt{y}=\sqrt{1000}-\sqrt{x}$ alapján

$$y=x+1000-2\sqrt{1000x}=x+1000-20\sqrt{10x},$$

azaz $20\sqrt{10x}=x-y+1000$. 1 pont

Egyenletünk alapján $\sqrt{10x}$ racionális szám, de x egész szám, ezért $10x$ csak négyzetszám lehet. 1 pont

Ha viszont $10x$ négyzetszám, akkor $x=10k^2$ alakú, ahol $k\in\mathbb{N}$. 1 pont

Teljesen hasonló módon adódik, hogy $y=10n^2$ alakú, ahol $n\in\mathbb{N}$.

Az eredeti egyenlet az $x=10k^2$, $y=10n^2$ helyettesítéssel $k\sqrt{10}+n\sqrt{10}=10\sqrt{10}$, azaz $k+n=10$. 1 pont

A lehetséges $(k;n)$ számpárok száma így 11, amelyek

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

. 1 pont

A megfelelő $(x;y)$ számpárok ennek megfelelően

x	0	10	40	90	160	250	360	490	640	810	1000
y	1000	810	640	490	360	250	160	90	40	10	0

.

A megadott számpárok ki is elégítik az eredeti egyenletet. 2 pont

Összesen: 7 pont

Megjegyzés.

(1) Alig indokolt megoldások esetén a dolgozat értéke legfeljebb 3 pont lehet.

(2) Ha a megadott számpárok legalább fele hibás, akkor jó gondolatmenet esetén is csak maximálisan 4 pont adható a feladat megoldására.

2. Legyen $A = 1\underbrace{77\ldots7}_{2k+1\ \text{db}}6$ és $B = 3\underbrace{55\ldots5}_{k\ \text{db}}2$ $2k+3$, illetve $k+2$ jegyű természetes szám. Bizonyítsuk be, hogy $\sqrt{A-B}$ is természetes szám, és határozzuk meg $\sqrt{A-B}$ jegyeinek számát!

Megoldás.

Alakítsuk át az A és B számokat a következőképpen:

$$A = 10^{2k+2} + 7 \cdot \big(\underbrace{11\ldots1}_{2k+1\ \text{db}}\big) \cdot 10 + 6 =$$

$$= 10^{2k+2} + \frac{7}{9} \cdot \big(\underbrace{99\ldots9}_{2k+1\ \text{db}}\big) \cdot 10 + 6 = 10^{2k+2} + \frac{7}{9} \cdot \big(10^{2k+1} - 1\big) \cdot 10 + 6,$$

ahonnan $A = \dfrac{16}{9} \cdot \big(10^{2k+2} - 1\big)$ adódik. 2 pont

Hasonlóan

$$B = 3 \cdot 10^{k+1} + 5 \cdot \big(\underbrace{11\ldots1}_{k\ \text{db}}\big) \cdot 10 + 2 = 3 \cdot 10^{k+1} + \frac{5}{9} \cdot \big(\underbrace{99\ldots9}_{k\ \text{db}}\big) \cdot 10 + 2 =$$

$$= 3 \cdot 10^{k+1} + \frac{5}{9} \cdot \big(10^{k} - 1\big) \cdot 10 + 2,$$

ebből pedig $B = \dfrac{32}{9} \cdot \big(10^{k+1} - 1\big)$ következik. 2 pont

Képezzük az $A - B$ különbséget:

$$A - B = \frac{16}{9} \cdot \big(10^{2k+2} - 1\big) - \frac{32}{9} \cdot \big(10^{k+1} - 1\big) = \frac{16}{9} \cdot \big(10^{2k+2} - 2 \cdot 10^{k+1} + 1\big) =$$

$$= \left(\frac{4}{3} \cdot \big(10^{k+1} - 1\big)\right)^2.$$ 1 pont

Ekkor

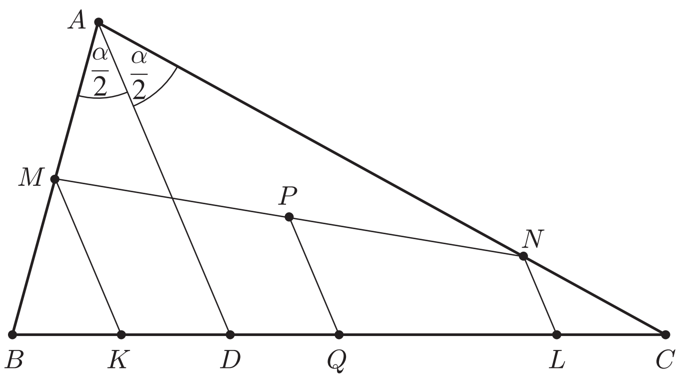
$$\sqrt{A-B} = \frac{4}{3} \cdot \big(10^{k+1} - 1\big) = \frac{4}{3} \cdot \big(\underbrace{99\ldots9}_{k+1\ \text{db}}\big) = 4 \cdot \big(\underbrace{33\ldots3}_{k+1\ \text{db}}\big) = 1\underbrace{33\ldots3}_{k\ \text{db}}2,$$ 1 pont

ami $k+2$ jegyű természetes szám. 1 pont

Összesen: 7 pont

3. Az ABC háromszögben $AC = 2AB$. Az AB és AC oldalon vegyük fel az M, illetve N pontokat úgy, hogy az $\dfrac{AB}{2} = AM = CN = \dfrac{AC}{4}$ összefüggés teljesüljön. Jelölje P az MN és Q a BC szakaszok felezőpontját, AD pedig a BAC szög szögfelezőjét, ahol D illeszkedik BC-re. Igazoljuk, hogy $PQ : AD = 3 : 8$!

Megoldás.



Segédszerkesztés: Legyen K és L a BC szakasz két olyan pontja, amelyre MK és PL párhuzamos AD-vel, így $MKLN$ trapéz. 1 pont

Bevezetjük a következő jelöléseket: $AB = c$; $AC = b$; $BC = a$; $BD = x$ és $DC = a - x$. A szögfelezőtételt alkalmazva a következő egyenlőséghez jutok: $\dfrac{x}{c} = \dfrac{a-x}{b}$. A feltételben szereplő összefüggést – vagyis, hogy $\dfrac{c}{2} = \dfrac{b}{4}$ – felhasználva $x = \dfrac{a}{3}$. 2 pont

Bizonyítjuk, hogy az $MKLN$ trapézban PQ középvonal, ahol P MN felezőpontja.

Az ABD háromszögben M az AB felezőpontja, $MK \parallel AD$, így MK középvonal, és $MK = \dfrac{AD}{2}$ és $BK = \dfrac{x}{2} = \dfrac{a}{6}$. 1 pont

ADC háromszögben $NL \parallel AD$, így $ADC\triangle \cong NLC\triangle$, a hasonlósági arány $4 : 1$, vagyis $NL = \dfrac{AD}{4}$, $LC = \dfrac{a-x}{4} = \dfrac{a}{6}$. 1 pont

Mivel Q felezőpontja BC-nek és $BK = CL$, ezért Q felezőpontja KL-nek is, így PQ középvonala az $MKLN$ trapéznak.

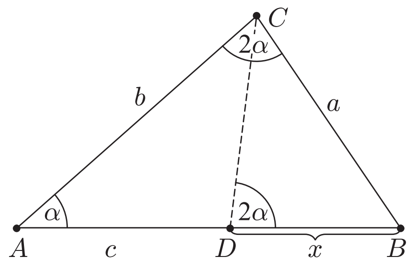
$$PQ = \frac{MK + NL}{2} = \frac{\frac{AD}{2} + \frac{AD}{4}}{2} = \frac{3}{8}AD.$$ 1 pont

Így bebizonyítottuk, hogy $PQ : AD = 3 : 8$. 1 pont

Összesen: 7 pont

4. Egy 90 cm kerületű háromszög oldalai cm-ben mérve egész szám hosszúak. Mekkorák az oldalak, ha a háromszög egyik szöge egy másik szögének kétszerese?

Megoldás.



Ábránknak megfelelően $AD = c - x$, $DB = x$, ahol CD az ACB szög belső szögfelezője.

A feladat megoldásának szempontjából érdektelen, hogy a háromszög melyik szöge kétszerese valamelyik másik szögének.

A BCD háromszög hasonló a BAC háromszöghöz, mert szögeik páronként egyenlők. 1 pont

A hasonlóság alapján $\frac{x}{a} = \frac{a}{c}$, azaz $x = \frac{a^2}{c}$,
továbbá a $CD = f$ jelöléssel $\frac{f}{a} = \frac{b}{c}$, így $f = \frac{ab}{c}$. 1 pont

Az ADC háromszög a szögei alapján egyenlő szárú ($AD = DC$), ezért $c - x = f$, azaz $c - \frac{a^2}{c} = \frac{ab}{c}$, ahonnan $b = \frac{c^2 - a^2}{a}$ adódik. 1 pont

Mivel $a + b + c = 90$, ezért $a + \frac{c^2 - a^2}{a} + c = 90$, így

$$a = \frac{c^2}{90 - c} = \frac{c^2 - 90c + 90c}{90 - c} = -c + \frac{90c - 90^2 + 90^2}{90 - c} = -c - 90 + \frac{90^2}{90 - c}.$$ 1 pont

A háromszög-egyenlőtlenség alapján egyrészt $a < c < 45$, másrészt pedig $b < a + c$ alapján $\frac{c^2 - a^2}{a} < a + c$, azaz $\frac{c}{2} < a$, így pedig $\frac{c}{2} < \frac{c^2}{90 - c}$, ahonnan $c > 30$ adódik.

Mivel pedig $30 < c < 45$, ezért $45 < 90 - c < 60$. 1 pont

Az $a = -c - 90 + \frac{90^2}{90 - c}$ formula alapján $90 - c$ osztója a $90^2 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^2$ számnak, ahol $45 < 90 - c < 60$.

A $90 - c$ osztó lehetséges értéke kétféle lehet: 50 vagy 54. 1 pont

Ekkor pedig a megoldások:

a	32	24
b	18	30
c	40	36

.

Mindkét megoldás megfelel a feladat feltételeinek. 1 pont

Összesen: 7 pont

Megjegyzés. Ha a versenyző az $a = \frac{c^2}{90 - c}$ formula alapján indokolva megadja az $(a; c)$ párok összes lehetséges értékét, akkor erre a részre 2 pontot kaphat.