Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2011/2012-es tanév
első (iskolai) forduló
haladók – II. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. A minden valós számra értelmezett $f(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2$ és $g(x) = mx$ függvény grafikonja érinti egymást, ahol m valós paraméter. Hol lehet az érintési pont?

Megoldás. Az $f(x)$ függvény képe $(2; 0)$ csúcsú felfelé nyíló parabola, $g(x)$ képe pedig origón átmenő egyenes. 1 pont

Érintés esetén a parabolának és az egyenesnek egy közös pontja van.

Tehát az $\frac{1}{2}(x-2)^2 = mx$, azaz az $\frac{1}{2}x^2 - (m+2)x + 2 = 0$ egyenlet diszkriminánsa 0. 1 pont

Így $(m+2)^2 - 4 = 0$, ahonnan $m(m+4) = 0$ adódik.

A megoldások $m = 0$, illetve $m = -4$. 2 pont

A két esetben az $\frac{1}{2}(x-2)^2 = mx$ egyenlet megoldása $x_1 = 2$ és $x_2 = -2$. 1 pont

Ennek megfelelően az érintési pontok $E_1(2; 0)$, valamint $E_2(-2; 8)$. 2 pont

---

Összesen: 7 pont

2. A Bergengóc királyi palota egyik folyosóját újra kell kövezni. A folyosó 20 dm széles és 99 dm hosszú. A felújítás idején kétféle járókövet lehet beszerezni: a kisebbik $4\ \mathrm{dm} \times 4\ \mathrm{dm}$-es és 100 garas az ára, a nagyobbik $5\ \mathrm{dm} \times 5\ \mathrm{dm}$-es és 130 garasba kerül. Mindkettő megvásárolható darabonként is. Legkevesebb hány garasból tudja a kincstárnok megoldani a folyosó kikövezését, ha a köveket nem szabad elvágni?

Megoldás. Először vizsgáljuk meg azt, hogy a 20 dm-es szélesség hogyan hozható ki a kétféle járókőből. Mivel nem lehet darabolni a köveket, páros sok 5-ös kell, hogy páros szélességet kapjunk. Mivel $20 - 2 \cdot 5 = 10$ nem osztható 4-gyel, ezért csak két lehetőség van:

- vagy 4 darab 5×5-ös;
- vagy 5 darab 4×4-es kerülhet egymás mellé.

Tehát a kikövezés úgy fog kinézni, hogy a 20×99-es téglalapot 20×4-es és 20×5-ös téglalapokkal fogjuk lefedni. 2 pont

Most arra fogunk koncentrálni, hogy a 99 dm-es hossz hogyan állhat össze 4 dm-es és 5 dm-es részekből. Meg kell tehát oldanunk a

$$4a + 5b = 99$$

egyenletet a nemnegatív egész számok halmazán. 1 pont

Átrendezve $4a = 99 - 5b$, tehát $99 - 5b$ 4-gyel osztható, ami pontosan akkor teljesül, ha b $4k + 3$ alakú. Innen már egyszerűen táblázatba foglalhatjuk a lehetőségeket:

a	b
21	3
16	7
11	11
6	15
1	19

2 pont

Végül azt kell meggondolnunk, hogy melyik fajta járókő az olcsóbb. Összesen $20 \cdot 99$ dm^2 területet kell lefednünk, ezért azt fogjuk kiszámolni, hogy melyik típusú kő esetén olcsóbb egy dm^2.

Mivel $130/25 < 6 < 100/16$, ezért a nagyobb járókő az olcsóbb, abból kell minél többet felhasználni. 1 pont

A táblázat utolsó sorában a legnagyobb a nagyobb kövek száma. Az $a = 1$ öt darab kisebb járókövet jelent, a $b = 19$ pedig $19 \cdot 4 = 76$ nagyobbat (hiszen 20 dm szélességben kell lerakni a köveket). Tehát a kincstár $5 \cdot 100 + 76 \cdot 130 = 10380$ garasból tudja megoldani a felújítást. 1 pont

Összesen: 7 pont

3. Egy trapéz átlói merőlegesek egymásra, az egyiknek a hossza 5 egység, a trapéz magassága 4 egység. Mekkora a területe?

Megoldás. Legyenek a trapéz párhuzamos oldalai a és c, átlói e és f. Mivel az átlók merőlegesek egymásra, a trapéz területe kiszámítható az $\frac{e \cdot f}{2}$ összefüggésből is. 1 pont

Így $\frac{5 \cdot f}{2} = \frac{(a+c)}{2} \cdot 4$, ebből $a + c = \frac{5}{4} f$. 2 pont

Az egyik átló eltolásával létre jön egy olyan derékszögű háromszög, amelynek befogói e és f, átfogója $a + c$. 1 pont

Erre felírva a Pitagorasz-tételt $\left(\frac{5}{4} f\right)^2 = 25 + f^2$, ebből $f = \frac{20}{3}$. 2 pont

$$T = \frac{5 \cdot \frac{20}{3}}{2} = \frac{50}{3} \quad \text{(területegység).}$$ 1 pont

Összesen: 7 pont

4. Adottak az $n=\overline{abcabc}$ és $m=\overline{d00d}$ alakú hatjegyű, illetve négyjegyű természetes számok, ahol a, b, c és d nem feltétlenül különböző számjegyeket jelöl.

$a)$ Mutassa ki, hogy $\sqrt{n}$ nem természetes szám!

$b)$ Határozza meg azokat az (n,m) számpárokat, ahol $n=\overline{abcabc}$ és $m=\overline{d00d}$ alakú természetes számok, továbbá igaz, hogy $\sqrt{n+m}\in\mathbb{N}$!

Megoldás. $a)$ $n=\overline{abcabc}=1001\cdot\overline{abc}=7\cdot 11\cdot 13\cdot\overline{abc}$. 1 pont

Mivel a 7, a 11 és a 13 prímszám, az n szám csakis akkor lehet négyzetszám, ha az $\overline{abc}$ háromjegyű természetes szám prímtényezős felbontásában szerepelnek ezen prímtényezők egy páratlan hatványon, ami ellentmond annak, hogy $\overline{abc}$ háromjegyű szám.
(Vagy: n csakis akkor lehet négyzetszám, ha $1001\mid\overline{abc}$-nek, ami lehetetlen.) 1 pont

$b)$ $n+m=1001\cdot(\overline{abc}+d)$. 1 pont

Mivel $n+m$ négyzetszám, ezért $\overline{abc}+d=1001\cdot k$, ahol k négyzetszámjegy és nem 0.

Ha $k=1$, akkor $a=b=9$, $d=11-c$ és $c\in\{2,3,4,\dots,9\}$. 2 pont

Tudjuk, hogy $\overline{abc}\leqq 999$ és $d\leqq 9$, így $\overline{abc}+d\leqq 1008$.

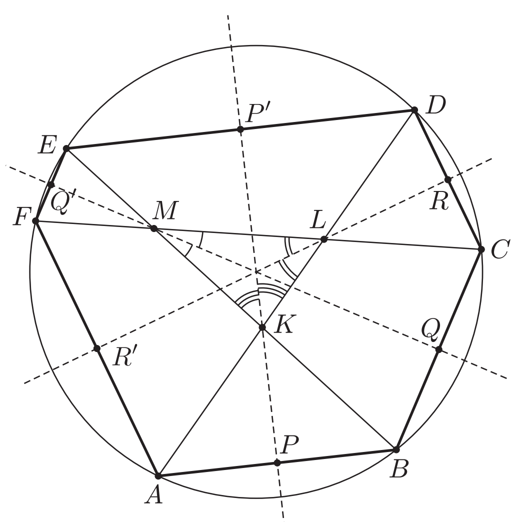
Ha $k=4$, akkor $\overline{abc}+d=4004$, ami lehetetlen, vagy
ha $k=9$, akkor $\overline{abc}+d=9009$, ami szintén lehetetlen 1 pont

A keresett számpárok: $(999999;2002)$; $(998998;3003)$; $(997997;4004)$; $(996996;5005)$; $(995995;6006)$; $(994994;7007)$; $(993993;8008)$; $(992992;9009)$. 1 pont

Összesen: 7 pont

5. Bizonyítsuk be, hogy ha egy hatszög szemben fekvő oldalai párhuzamosak és a szemben fekvő csúcsokat összekötő három átló egyenlő egymással, akkor a hatszög csúcsai egy körön fekszenek, vagyis a hatszög köré kör rajzolható.

Megoldás.



Legyen a feladat feltételeinek megfelelő hatszög $ABCDEF$.

Az $ABDE$ négyszög trapéz, amelynek AD és BE átlói egyenlőek egymással. Ebből következik, hogy a trapéz szimmetrikus. 1 pont

A PP' egyenes, mely összeköti a DE oldal P' felezőpontját és az AB oldal P felezőpontjával, ennek a trapéznak a szimmetriatengelye.

Ez az egyenes merőleges az AB és ED oldalakra, átmegy az AD és BE átlók metszéspontján, és felezi a köztük lévő szöget. 2 pont

Ugyanígy bizonyíthatjuk, hogy a hatszög BC és EF (CD és FA) oldalainak felezőpontjait összekötő QQ' (RR') egyenes merőleges ezekre az oldalakra és felezi a hatszög BE és CF (DA és CF) átlói által bezárt szöget. 1 pont

Így PP', QQ', RR' egyenesek szögfelezői az AD, BE és CF egyenesek alkotta KLM háromszögnek, (ha létezik a háromszög) és mint ilyenek, egy pontban metszik egymást, legyen ez O. 1 pont

Ha AD, BE és CF egyenesek egy pontban metszik egymást, akkor ugyanebben a pontban metszi egymást PP', QQ', RR' is, akkor ez a pont legyen O. 1 pont

Abból, hogy az $ABCDEF$ hatszög oldalainak felezőpontjaiban emelt merőlegesek egy pontban, O-ban metszik egymást, következik, hogy O egyenlő távolságra van a hatszög mindegyik csúcsától, azaz a hatszög köré kör rajzolható. 1 pont

---

Összesen: 7 pont