Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2011/2012-es tanév
2. forduló
haladók I. kategória

Megoldások és javítási útmutató

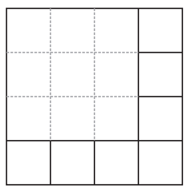
1. Bizonyítsuk be, hogy egy adott négyzet 2012 darab kisebb méretű négyzetre bontható úgy, hogy a kisebb méretű négyzetek oldalai párhuzamosak legyenek az eredeti négyzet oldalaival.

1. megoldás.

A feltételeknek megfelelően bármely négyzet felosztható 4 darab négyzetre a négyzet középvonalaival.

Ez azt jelenti, hogy bármely négyzetből 4 darab újabb négyzetet kaphatunk, ekkor pedig a meglevő négyzetek száma 3-mal növekszik. 1 pont

Egy adott négyzetet a feltételeknek megfelelő módon fel tudunk 8 darab négyzetre osztani az oldalak 4 részre osztásával a következő ábra szerint:



2 pont

Ezután ábránk bármelyik „kisebb” négyzetére alkalmazva a középvonalak szerinti felosztást – az előzőek alapján – 3-mal növekszik a kisebb méretű négyzetek száma.

Ha ezt az eljárást k-szor alkalmazzuk, akkor a keletkező négyzetek száma $8 + 3k$ lesz. 2 pont

Ha a négyzetek száma 2012, akkor $3k + 8 = 2012$, azaz $k = 668$. 1 pont

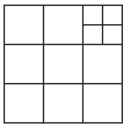
A $k = 668$ esetben az előállítás valóban megvalósítható, például az ábránk szerinti egyik „kis négyzet” középvonalak szerinti felosztásának 668-szor történő ismétlésével. 1 pont

Összesen: 7 pont

2. megoldás.

Egy adott négyzet a feltételeknek megfelelően felbontható 9 darab négyzetre a szemköztes oldalak megfelelő harmadolópontjait összekötő szakaszokkal.

Ekkor az eddig meglevő négyzetek száma 8-cal nő. 1 pont

A  felosztásban a kis négyzetek száma 12. 2 pont

Az első megoldás alapján a keletkező négyzetek száma $12 + 8k$, ha a keletkezett kis négyzetek egyikét 9 darab kisebb négyzetre osztjuk k-szor egymás után. 2 pont

Mivel $12 + 8k = 2012$, így $k = 250$. 1 pont

A konstrukció megvalósítható. 1 pont

Összesen: 7 pont

3. megoldás.

Először 43^2 számú egybevágó négyzetre osztjuk az eredeti négyzetet. 1 pont

Ezután az egyik kis négyzetet 4 részre osztjuk a középvonalaival. 1 pont

A keletkező négyzetek közül két darabot egyenként $9 \cdot 9 = 81$ darab egybevágó kisebb négyzetre osztunk. 2 pont

Így az összesen keletkező négyzetek száma

$$43^2 - 1 + 2^2 + 9^2 - 1 + 9^2 - 1 = 2012.$$ 2 pont

A konstrukció valóban megvalósítható. 1 pont

Összesen: 7 pont

Megjegyzések.

(1) Indoklás nélküli konstrukció megadásáért legfeljebb 5 pont adható.

(2) Bármilyen megoldásért a megadott megoldások részpontszámaival arányosan adhatók meg a megfelelő pontszámok.

2. Hány olyan pozitív egész szám van, amelyre igaz, hogy számjegyeinek összege és szorzata is egyaránt 24?

Megoldás.

A keresett számokban előforduló számjegyek lehetséges értéke 1, 2, 3, 4, 6, 8 a szorzatra vonatkozó feltétel alapján. 1 pont

A számjegyek nem növekvő sorrendbe rendezve a következők lehetnek az összegre adott feltétel alapján:

8, 3	és 13 db 1-es,
6, 4	és 14 db 1-es,
6, 2, 2	és 14 db 1-es,
4, 3, 2	és 15 db 1-es,
3, 2, 2, 2	és 15 db 1-es.

2 pont

Az öt lehetséges esetben a megoldások száma rendre

$$\frac{15!}{13!},\quad \frac{16!}{14!},\quad \frac{17!}{2!\cdot 14!},\quad \frac{18!}{15!},\quad \frac{19!}{15!\cdot 3!}.$$

2 pont

A keresett számok száma az öt esetben kapott értékek összege. 1 pont

Összesen tehát

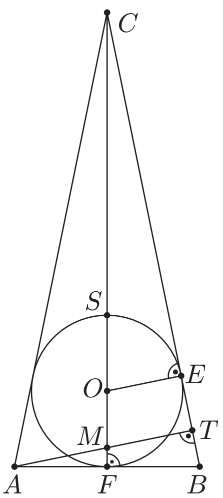
$$15\cdot 14+16\cdot 15+17\cdot 8\cdot 15+18\cdot 17\cdot 16+19\cdot 17\cdot 16\cdot 3=22\,890$$

darab szám felel meg a feladat feltételeinek. 1 pont

Összesen: 7 pont

3. Egy egyenlőszárú háromszög magasságpontja M, súlypontja S. Az S pont rajta van a háromszög beírt körén. Mekkora az MS szakasz és a háromszög alaphoz tartozó magasságának aránya?

Megoldás.



Ábránk jelöléseinek megfelelően legyen $AF=FB=x$, $FM=y$, $OF=OE=OS=r$ a beírt kör sugara, továbbá $FC=m$.

Az S súlypont osztási arányára vonatkozó tétel alapján $FC=m=$ $=6r$, így $OC=5r$. 1 pont

Az OEC derékszögű háromszögből Pitagorasz tétele alapján

$$EC=\sqrt{(5r)^2-r^2}=2r\sqrt{6}.$$

1 pont

Az AMF és a COE háromszög hasonló, mert egy-egy derékszögük van, valamint az A és C csúcsnál fekvő szögek merőleges szárú hegyesszögek. 1 pont

Így pedig $\dfrac{FM}{AF}=\dfrac{OE}{EC}$, azaz $\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{2\sqrt{6}}$. 1 pont

Az AFC és a CEO háromszög is hasonló, ezért

$$\frac{AF}{FC}=\frac{OE}{EC},\quad \text{azaz}\quad \frac{x}{6r}=\frac{1}{2\sqrt{6}},\quad \text{tehát}\quad x=\frac{\sqrt{6}}{2}\,r.$$

1 pont

Mivel $\dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{2\sqrt{6}}$, ezért $y = \dfrac{x}{2\sqrt{6}} = \dfrac{1}{2\sqrt{6}} \cdot \dfrac{\sqrt{6}}{2} r = \dfrac{r}{4}$. 1 pont

Az előzőek alapján így

$$\frac{MS}{FC} = \frac{2r - y}{m} = \frac{2r - \frac{r}{4}}{6r}, \quad \text{azaz} \quad \frac{MS}{FC} = \frac{7}{24}. \qquad \text{1 pont}$$

Összesen: 7 pont

4. Az $x^n + (x+1)^n + (x+2)^n + (x+3)^n + (x+4)^n + (x+5)^n + (x+6)^n$ összeg osztható 7-tel, ahol x egész szám és n pozitív egész szám. Oldjuk meg az $n < 2012$ egyenlőtlenséget!

Megoldás.

Az x, $x+1$, $x+2$, $x+3$, $x+4$, $x+5$, $x+6$ számok 7-es maradéka mind különböző, azaz valamilyen sorrendben 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ezért elég vizsgálni az $1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n$ összeg 7-es maradékát. 1 pont

Ha n páratlan szám, akkor az $a^{2k+1} + b^{2k+1}$ összeg szorzattá alakítására vonatkozó szabály alapján ($a \in \mathbb{Z}^+$, $b \in \mathbb{Z}^+$, $k \in \mathbb{N}$) a hatványösszeg az $(1^n + 6^n) + (2^n + 5^n) + (3^n + 4^n)$ csoportosításnak megfelelően osztható 7-tel. 1 pont

Ha az n kitevő $6k$ alakú ($k \in \mathbb{Z}^+$), akkor az $1^{6k} + 2^{6k} + 3^{6k} + 4^{6k} + 5^{6k} + 6^{6k}$ összeg 7-es maradéka 6, mert az 1^k, $(2^6)^k$, $(3^6)^k$, $(4^6)^k$, $(5^6)^k$, $(6^6)^k$ hatványok 7-es maradéka rendre 1, hiszen 1^k maradéka 1, $(2^6)^k = (8 \cdot 8)^k$ maradéka 1, $(3^6)^k = (3^3)^{2k}$ 7-es maradéka 1, továbbá 1 és 6, 2 és 5, valamint 3 és 4 7-es maradékának abszolút értéke külön-külön megegyezik, a kitevők pedig párosak ($2k$-val oszthatók).

Tehát $n = 6k$ ($k \in \mathbb{Z}^+$) esetén a hatványösszeg nem osztható 7-tel. 2 pont

Ha $n = 6k + 2$ alakú ($k \in \mathbb{N}$), akkor az $1^{6k+2} + 2^{6k+2} + 3^{6k+2} + 4^{6k+2} + 5^{6k+2} + 6^{6k+2}$ hatványösszeg 7-es maradéka az előző eset alapján $1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2$ 7-es maradékának felel meg, ami 0. 1 pont

Ha $n = 6k + 4$ alakú ($k \in \mathbb{N}$), akkor a hatványösszeg 7-es maradéka az előzőek alapján $1 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + 5^4 + 6^4$ 7-es maradékával egyezik meg, azaz $1 + 2 + 4 + 4 + 2 + 1 = 14$ alapján a hatványösszeg osztható 7-tel. 1 pont

Összesen így az n kitevő értéke bármely 2012-nél kisebb, de 6-tal nem osztható pozitív egész szám lehet. 1 pont

---

Összesen: 7 pont