Bolyai János
Matematikai Társulat

Oktatásért Közalapítvány
támogatásával

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2010/2011-es tanév
2. (döntő) forduló
haladók III. kategória

Feladatok

1. Bizonyítsuk be, hogy a koordinátarendszer kezdőpontja, valamint a valós számok lehető legbővebb halmazán értelmezett $f(x) = x^2 - 4x$ és $g(x) = 2 + \sqrt{x+4}$ függvények grafikonjának metszéspontjai olyan konvex sokszöget határoznak meg, melynek egyik szöge derékszög.

2. Az $A_1A_2A_3A_4$ húrnégyszögben bevezetjük a ciklikus indexelést: A_i és A_{i+4} jelentse ugyanazt a csúcsot. Az A_i pont merőleges vetülete az $A_{i+1}A_{i+2}$ egyenesen legyen P_i, az $A_{i+1}A_{i+3}$ egyenesen pedig Q_i. Bizonyítsuk be, hogy a P_iQ_i egyenesek ($i = 1, 2, 3, 4$) egy ponton mennek át.

3. A Zenekedvelők Végtelen Kollégiumában egyetlen – mindkét irányban végtelen hosszú – folyosón vannak a lakószobák, egészekkel sorszámozva. Lehetnek üres szobák, és egy szobában többen is lakhatnak. Minden szobában áll egy hatalmas zongora, amin a lakók szeretnek játszani. Ha azonban két szomszéd (a k. és a $(k+1)$. szobában) gyakorol a zongorán, az kellemetlen zenei élményhez vezet, ezért egy szobával arrébb költöznek. Ez minden nap a következő módon történik: ha vannak szomszédok, akkor kiválasztunk egy-egy szomszédos lakót (a k. és a $(k+1)$. szobában), és egyikőjük a $(k-1)$., a másik pedig a $(k+2)$. szobába költözik.

Bizonyítsuk be, hogy ha a kollégiumnak véges sok lakója van, akkor véges sok nap után abbamarad a költözködés.

Az eredményhirdetést 2011. május 13-án (pénteken) 14.00 órai kezdettel tartjuk az MTA Rényi Alfréd MKI Nagytermében (Budapest, V. ker., Reáltanoda u. 13–15.).