Bolyai János
Matematikai Társulat

Oktatásért Közalapítvány
támogatásával

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2010/2011-es tanév
1. forduló
haladók III. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Határozzuk meg az n és az A természetes számot úgy, hogy az $A = 2n^3 + 10n^2 - 2n - 10$ számnak pontosan 8 osztója legyen!

Megoldás. A csoportosítással és kiemeléssel szorzattá alakítható:

$$A = 2(n-1)(n+1)(n+5).$$ 2 pont

A-nak pontosan nyolc osztója akkor lehet, ha p^7, vagy $p^3 \cdot q$, vagy $p \cdot q \cdot r$ alakú, ahol p, q, r különböző prímek. 1 pont

Ha $A = 2(n-1)(n+1)(n+5) = p^7$, ekkor p csak 2 lehet, és ez $n = 3$ esetén pont megfelelő is. Ekkor $A = 2^7 = 128$. 1 pont

Ha $A = 2(n-1)(n+1)(n+5) = p^3 \cdot q$, ekkor $p = 2$, vagy $q = 2$ lehetséges csak. Előbbi esetén $4q = (n-1)(n+1)(n+5)$, amihez nem létezik megfelelő n, hiszen a jobb oldal páratlan, vagy 8-cal osztható, a bal oldal pedig 4-gyel osztható és q páratlan.

Utóbbi esetén $p^3 = (n-1)(n+1)(n+5)$, amihez nem létezik megfelelő n, mivel p páratlan, így n-nek párosnak kellene lennie és ekkor, az $n = 2$ nem ad megoldást, $n > 2$ esetén pedig $n-1$ és $n+1$, két szomszédos páratlan szám, azaz a szorzatuk nem lehet ugyanazon, 3-nál nagyobb egyenlő szám hatványa. 1 pont

Ha $A = 2(n-1)(n+1)(n+5) = p \cdot q \cdot r$, ekkor pl. $r = 2$, azaz $(n-1)(n+1)(n+5) = p \cdot q$, ami $n = 2$ esetben megoldás, ekkor $A = 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 7 = 42$, $n > 2$ esetén a bal oldal nem lehet 2 prím szorzata. 1 pont

A feladatnak 2 megoldása van: $n = 2$, ekkor $A = 42$, és $n = 3$, ekkor $A = 128$. 1 pont

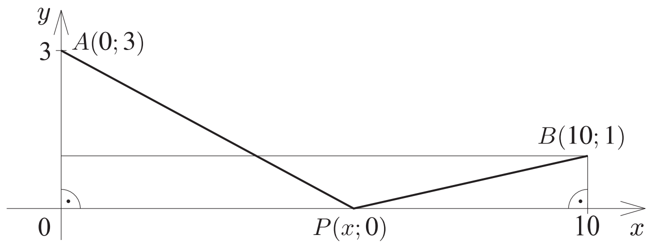
---

Összesen: 7 pont

2. Milyen x valós szám esetén lesz legkisebb a $\sqrt{x^2+9} + \sqrt{x^2 - 20x + 101}$ kifejezés értéke?

Megoldás. $x^2 - 20x + 101 = (10-x)^2 + 1$, ezért az $f(x) = \sqrt{x^2+9} + \sqrt{(10-x)^2+1}$ függvény minimumhelyét kell megadni. 1 pont

Helyezzük el derékszögű koordinátarendszerben a $(0;3)$, $(10;1)$ és $(x;0)$ pontokat:



Az ábra szerinti jelölésekkel $PA = \sqrt{x^2+9}$ és $PB = \sqrt{(10-x)^2+1}$. 2 pont

Minimum nyilvánvalóan csak akkor lehet, ha $0 < x < 10$. Ha a B pont x tengelyre vonatkozó tükörképe $B'(10;-1)$, akkor a keresett $PA+PB$ összeg minimuma megegyezik a $PA+PB'$ összeg minimumával. 1 pont

Mivel $A(0;3)$ és $B'(10;-1)$ adott pontok, ezért

$$\sqrt{x^2+9}+\sqrt{(10-x)^2+1} = PA+PB = PA+PB'$$

akkor minimális, ha P az x tengely és az AB' szakasz metszéspontja. Máskülönben $AP+PB' > AB'$. 1 pont

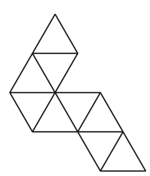
Amennyiben pedig P az említett metszéspont, akkor az APB' egyenes egyenlete

$$y = -\frac{2}{5}x+3. \qquad \text{1 pont}$$

Az egyenes pedig a $\left(\frac{15}{2};0\right)$ pontban metszi az x tengelyt. Ez pedig azt jelenti, hogy $x = 7{,}5$ esetén minimális értékű az eredeti kifejezés. 1 pont

Összesen: 7 pont

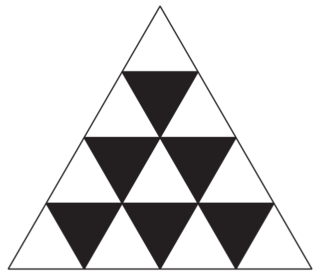
3. Egy szabályos háromszög oldalait n egyenlő részre bontottuk. Az osztópontokon keresztül párhuzamosokat rajzoltunk a háromszög oldalaival, így az eredeti háromszöget kisebb szabályos háromszögekre daraboltuk. Nevezzük *kígyónak* a kis szabályos háromszögek olyan sorozatát, amelyben az egymást követő elemeknek van közös oldala. Például $n=4$-re így nézhet ki egy kígyó:



Mekkora a lehetséges leghosszabb kígyó?

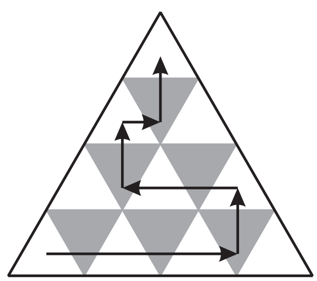
Megoldás. Először teljes indukcióval bebizonyítjuk, hogy a felosztás n^2 darab kis háromszöget hoz létre. Ez $n \leqq 2$ esetén könnyen ellenőrizhető. Feltesszük, hogy n-ig igaz az állítás, és vizsgáljuk az $n+1$ részre osztást. Helyezzük el úgy a háromszöget, hogy egyik oldala vízszintes legyen. Nézzük azt a felosztásban szereplő egyenest, ami ezzel az oldallal párhuzamos, és hozzá legközelebb esik. Ez az egyenes egy háromszögre és egy trapézra bontja az eredeti háromszöget. Az indukciós feltevés szerint a kapott háromszög n^2 darab kis háromszögre bomlik. A trapéz pedig $(n+1)+n=2n+1$ kis háromszögből áll. $n^2+2n+1=(n+1)^2$, ezzel bebizonyítottuk az eredeti állítást. 2 pont

Most megmutatjuk, hogy a kígyó nem lehet hosszabb, mint n^2-n+1. Ehhez „sakktáblaszerűen" színezzük az ábrát.



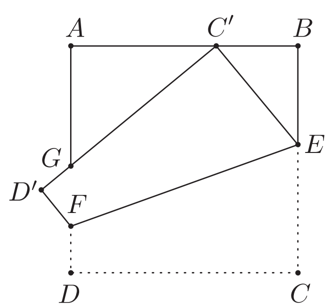
Minden fekete háromszögnek (felette) van fehér párja. Így a legalsó sor n darab fehér háromszögének nem marad fekete pár. A kígyó viszont felváltva tartalmaz fekete és fehér háromszögeket, ezért egy kígyóban legfeljebb 1-gyel lehet több fehér, mint fekete háromszög. Tehát legalább $n-1$ fehér háromszög „kimarad", így legfeljebb $n^2-(n-1)=n^2-n+1$ háromszögből állhat egy kígyó. 3 pont

Végül megmutatjuk, hogy az n^2-n+1 megvalósítható. Ha „soronként" haladunk, akkor minden sorban egy háromszög marad ki, kivéve az utolsót, ahol nem kell kihagyni az egyetlen háromszöget. 2 pont



Összesen: 7 pont

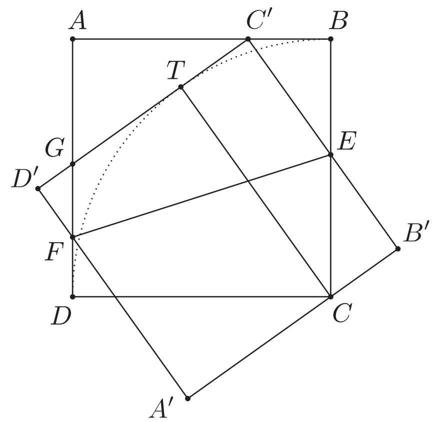
4. Egy $ABCD$ négyzet alakú papírt félbehajtunk úgy, hogy a C csúcs az AB oldalon fekvő C' pontba kerül.



$a)$ Bizonyítsuk be, hogy a C középpontú és CB sugarú kör érinti a $C'D'$ egyenest!

$b)$ Bizonyítsuk be, hogy a $C'BE$ és FGD' háromszögek kerületének összege egyenlő az $AC'G$ háromszög kerületével!

Megoldás. $a)$ A hajtogatás következménye, hogy az EF egyenesre tükrözve C és C', továbbá D és D' egymás képei. (Ha a hajtogatásnál egy P pont P'-be kerül, akkor a hajtási él a PP' szakasz felezőmerőlegese.) 1 pont



Tükrözzük A-t és B-t is EF-re, a tükörképek legyenek A' és B'. Ekkor $A'B'C'D'$ egybevágó $ABCD$-vel. Mivel C' rajta van AB-n, ezért C-nek rajta kell lennie $A'B'$-n. 1 pont

Jelölje T a C pont merőleges vetületét $C'D'$-n. Mivel C az $A'B'$ pontja, ezért CT a négyzet(ek) oldalával egyenlő hosszú, tehát $CT = CB$. Ebből következik, hogy a C középpontú, CB sugarú kör (a továbbiakban k) érinti $C'D'$-t (és az is kiderült, hogy az érintési pont T). 1 pont

$b)$ Az előbb kapott T pont a $C'G$ szakasznak belső pontja, hiszen k csak a négyzet belsejében érintheti $C'D'$-t. Az alábbiakban többször használni fogjuk, hogy külső pontból a körhöz húzott érintőszakaszok egyenlők.

AGC' kerülete:

$$AG + GC' + C'A = AG + (GT + TC') + C'A = (AG + GT) + (TC' + C'A) =$$
$$= (AG + GD) + (BC' + C'A) = AD + BA,$$

ami éppen az eredeti négyzet kerületének fele. (Itt felhasználtuk, hogy k érintési pontjai a négyzet oldalegyenesein D és B.) 1 pont

BEC' kerülete:

$$C'B + BE + EC' = C'B + BE + EC = C'B + BC.$$ 1 pont

$GD'F$ kerülete:

$$GD' + D'F + FG = GD' + DF + FG = GD' + DG = GD' + TG = TD'.$$ 1 pont

Utóbbi két kerület összege:

$$C'B + BC + TD' = C'T + BC + TD' = C'T + TD' + BC = C'D' + BC,$$

ami szintén két négyzetoldal összhossza, így valóban egyenlő AGC' kerületével. 1 pont

Összesen: 7 pont

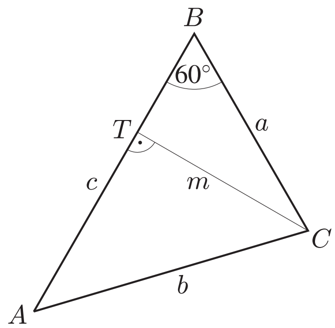
5. Végtelen sok olyan háromszög van, amelynek oldalai

(1) páronként különböző egész számok, továbbá

(2) a háromszög egyik szöge 60°.

Például az 5, 7, 8 egység oldalú háromszög megfelelő. Kérdésünk az, hogy az (1) és (2) feltételek teljesülése esetén lehet-e mindegyik oldal értéke prímszám?

Megoldás. Ha a háromszög oldalai a, b, c, ahol $a < b < c$, akkor a 60°-os szög csak a b oldallal szemközt lehet.



Ábránk jelöléseit használva a BTC nevezetes derékszögű háromszögből $BT = \dfrac{a}{2}$, $m = a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. 1 pont

Az ACT háromszögre Pitagorasz tétele alapján

$$b^2 = \left(c - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

teljesül.

A kapott összefüggés rendezett alakja: $b^2 = a^2 - ac + c^2$. 1 pont

Újabb rendezéssel a $(b - a)(b + a) = c(c - a)$ alakot kapjuk. 1 pont

Ha a, b, c mindegyike különböző prímszám lenne, ahol $a < b < c$, akkor c prím volta miatt c osztója a $(b - a)(b + a)$ szorzatnak, így pedig $(b - a)$-nak vagy $(b + a)$-nak osztója. 1 pont

$c \mid (b - a)$ lehetetlen, mert $c > b - a$ a háromszög-egyenlőtlenség miatt. 1 pont

$c \mid (b + a)$ is lehetetlen, mert $b + a < 2c$, ezért c csak $b + a$ értékű lehetne, ami $c < a + b$ miatt nem valósulhat meg. 1 pont

Tehát nem lehet mindhárom oldal különböző prímszám. 1 pont

Összesen: 7 pont