Bolyai János
Matematikai Társulat

Oktatásért Közalapítvány
támogatásával

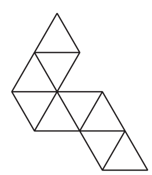
Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2010/2011-es tanév
1. forduló
haladók III. kategória

Feladatok

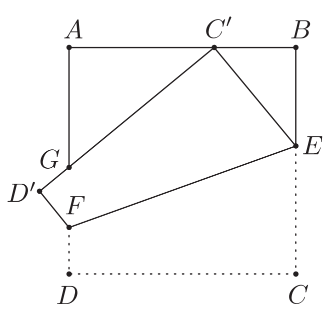
1. Határozzuk meg az n és az A természetes számot úgy, hogy az $A = 2n^3 + 10n^2 - 2n - 10$ számnak pontosan 8 osztója legyen!

2. Milyen x valós szám esetén lesz legkisebb a $\sqrt{x^2+9} + \sqrt{x^2 - 20x + 101}$ kifejezés értéke?

3. Egy szabályos háromszög oldalait n egyenlő részre bontottuk. Az osztópontokon keresztül párhuzamosokat rajzoltunk a háromszög oldalaival, így az eredeti háromszöget kisebb szabályos háromszögekre daraboltuk. Nevezzük *kígyónak* a kis szabályos háromszögek olyan sorozatát, amelyben az egymást követő elemeknek van közös oldala. Például $n = 4$-re így nézhet ki egy kígyó:



Mekkora a lehetséges leghosszabb kígyó?



4. Egy $ABCD$ négyzet alakú papírt félbehajtunk úgy, hogy a C csúcs az AB oldalon fekvő C' pontba kerül.

$a)$ Bizonyítsuk be, hogy a C középpontú és CB sugarú kör érinti a $C'D'$ egyenest!

$b)$ Bizonyítsuk be, hogy a $C'BE$ és FGD' háromszögek kerületének összege egyenlő az $AC'G$ háromszög kerületével!

5. Végtelen sok olyan háromszög van, amelynek oldalai

(1) páronként különböző egész számok, továbbá

(2) a háromszög egyik szöge $60°$.

Például az 5, 7, 8 egység oldalú háromszög megfelelő. Kérdésünk az, hogy az (1) és (2) feltételek teljesülése esetén lehet-e mindegyik oldal értéke prímszám?