Bolyai János
Matematikai Társulat

Oktatásért Közalapítvány
támogatásával

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2010/2011-es tanév
2. forduló
haladók II. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Egy sportversenyen 15 csapat vett részt, és minden csapat minden csapattal egyszer mérkőzött. A győzelemért 3, a döntetlenért 2, a vereségért 1 pont járt. A verseny végén minden csapatnak más volt a pontszáma, az utolsó 21 pontot szerzett. Bizonyítsuk be, hogy a legtöbb pontot gyűjtött csapat legalább egyszer döntetlenül mérkőzött!

Megoldás. A verseny folyamán a csapatok összesen $\frac{15 \cdot 14}{2} = 105$ mérkőzést játszottak. 1 pont

Mivel egy-egy mérkőzésen pontosan 4 pontot osztottak szét a csapatok között, ezért az összes pontok száma $105 \cdot 4 = 420$. 1 pont

Az utolsó helyen végzett csapatnak 21 pontja volt, az előtte végzők rendre legalább 1-1 ponttal többet kaptak, így a 15 csapatnak legalább $21+22+23+\ldots+35 = 420$ pontja volt. Ez éppen megegyezik a kiosztott pontok számával, így a győztes csapatnak éppen 35 pontja volt. 2 pont

Tegyük fel, hogy a 35 pontot csak győzelmekből és vereségekből érték el, és a győzelmek számát jelöljük G-vel, ekkor $14 - G$ a vereségek száma:

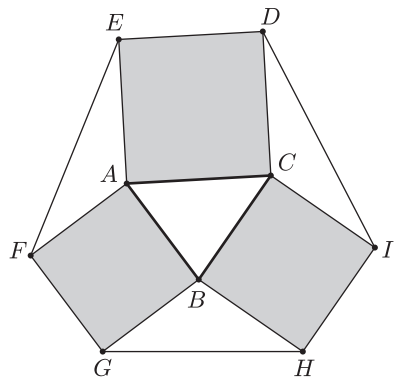
$$3 \cdot G + 14 - G = 35.$$

Mivel a bal oldalon álló kifejezés páros, a jobb oldal páratlan, így nincs az egyenletnek egész megoldása. 2 pont

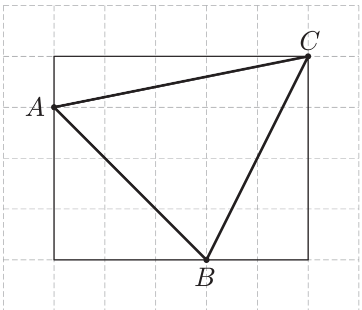
Tehát a legtöbb pontot szerző csapat biztosan legalább egyszer döntetlenül mérkőzött. 1 pont

Összesen: 7 pont

2. Az ABC háromszög oldalaira kifelé négyzeteket írunk. A négyzetek területe 18, 20 és 26 egység. Ezután összekötjük az ábra szerint a négyzetek „külső” csúcsait. Mekkora az így keletkezett $DEFGHI$ hatszög területe?



I. megoldás. Először megmutatjuk, hogy az ABC háromszög területe 9 egység.



1. lehetőség: Az ABC háromszöget beírhatjuk egy $5 \cdot 4$ egység oldalú téglalapba az ábra szerint. 1 pont

Az oldalak hossza Pitagorasz tétele szerint $\sqrt{18}$, $\sqrt{20}$ és $\sqrt{26}$ lesz. 1 pont

Így a háromszög területét kiszámíthatjuk, ha a téglalap területéből levonjuk a 3 sarkon lévő kis háromszög területét:

$$T = 5 \cdot 4 - \frac{1 \cdot 5}{2} - \frac{2 \cdot 4}{2} - \frac{3 \cdot 3}{2} = 9.$$ 1 pont

---

2. lehetőség: Mivel a négyzetek területe 18, 20 és 26 egység, ezért a háromszög oldalai rendre $\sqrt{18}$, $\sqrt{20}$ és $\sqrt{26}$. 1 pont

A háromszög területét kiszámíthatjuk a Heron-képlettel: $T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, ahol $2s = K$.

$$s = \frac{1}{2}\left(\sqrt{18} + \sqrt{20} + \sqrt{26}\right),$$

$$T = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{18} + \sqrt{20} + \sqrt{26}\right)\frac{1}{2}\left(-\sqrt{18} + \sqrt{20} + \sqrt{26}\right)} \cdot$$

$$\cdot \sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{18} - \sqrt{20} + \sqrt{26}\right)\frac{1}{2}\left(\sqrt{18} + \sqrt{20} - \sqrt{26}\right)} =$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{AB} = 9.$$

$$A = \left(\sqrt{18}+\sqrt{20}+\sqrt{26}\right)\left(-\sqrt{18}+\sqrt{20}+\sqrt{26}\right) =$$

$$= \left(\left(\sqrt{20}+\sqrt{26}\right)+\sqrt{18}\right)\left(\left(\sqrt{20}+\sqrt{26}\right)-\sqrt{18}\right) =$$

$$= 20+26+2\sqrt{20}\sqrt{26}+18 = 28+2\sqrt{20}\sqrt{26}\,,$$

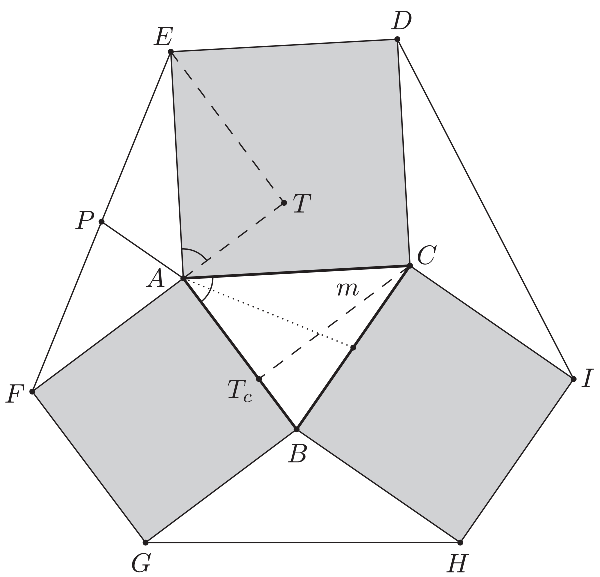
$$B = \left(\sqrt{18}-\sqrt{20}\right)\left(\sqrt{18}+\sqrt{20}\right)-\sqrt{26}\left(\sqrt{18}-\sqrt{20}\right)+\sqrt{26}\left(\sqrt{18}+\sqrt{20}-\sqrt{26}\right) =$$

$$= 18-20-\sqrt{26}\sqrt{18}+\sqrt{26}\sqrt{20}+\sqrt{26}\sqrt{18}+\sqrt{26}\sqrt{20}-26 = -28+2\sqrt{20}\sqrt{26}\,,$$

$$AB = 4\cdot 20\cdot 26-28^2 = 2080-784 = 1296,$$

$$T = \frac{\sqrt{1296}}{4} = \frac{36}{4} = 9.$$ 2 pont

Most megmutatjuk, hogy az ABC háromszög területe megegyezik a AFE, CDI és BHG háromszögek területével.



1. meggondoldás: Kössük össze az A csúcsot az EF szakasz P felezőpontjával. Amennyiben az AEF háromszöget az AP mentén kettévágjuk, és a két háromszöget az azonos $EP=PF$ mentén összeillesztjük, akkor az ABC háromszöggel egybevágó háromszöget kapunk, mert a két háromszög két oldala megegyezik:

$AE=AC$, mert ez a négyzet b oldala,

$AF=AB$, mert ez a négyzet c oldala,

valamint a két oldal közbezárt szöge is egyenlő:

$$AFP\sphericalangle + PEA\sphericalangle = 180^\circ - EAF\sphericalangle.$$

Az A pont körül vizsgálva a szögeket:

$$BAC\sphericalangle = 360^\circ - 2\cdot 90^\circ - EAF\sphericalangle = 360^\circ - 180^\circ - 180^\circ + AFP\sphericalangle + PEA\sphericalangle =$$

$$= AFP\sphericalangle + PEA\sphericalangle.$$

Ez hasonlóan igaz a CDI és BHG háromszögekre is. 3 pont

---

2. meggondoldás: Az AFE háromszög területét kiszámíthatjuk, mint az AF oldal és a hozzá tartozó magasság szorzatának fele. Az ABC háromszögnél a terület kiszámítható, mint az AB oldal és a c oldalhoz tartozó magasság szorzatának a fele. $AF = AB$, mert ugyanannak a négyzetnek az oldalai. 1 pont

Rajzoljuk meg az AF oldalhoz tartozó magasságot. Mivel AFE tompaszögű háromszög, ezért az AF oldalra az E pontból merőlegest állítva a T pont az AF szakaszon kívülre esik.

$EAT\sphericalangle = CAT_c\sphericalangle$, mert merőleges szárú szögek.

$EA = AC$, mert ugyanannak a négyzetnek az oldalai. 1 pont

Mivel minden szögük és egy megfelelő oldaluk megegyezik, ezért $AET_\triangle \cong ACT_{c\triangle}$, azaz a magasságok ($ET = CT_c$) megegyeznek. Így az AFE háromszög területe megegyezik az ABC háromszög területével.

Ez hasonlóan igaz a CDI és BHG háromszögekre is. 1 pont

---

3. meggondoldás:

$$T_{AFE} = \frac{AF \cdot AE \cdot \sin(AFE\sphericalangle)}{2},$$

$$T_{ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin(BAC\sphericalangle)}{2}.$$ 1 pont

$\sin(AFE\sphericalangle) = \sin(BAC\sphericalangle)$, mert $\sin\alpha = \sin(180^\circ - \alpha)$. 1 pont

$AF = AB$, mert ugyanannak a négyzetnek az oldalai, hasonlóan $AC = AE$.

Ez hasonlóan igaz a CDI és BHG háromszögekre is. 1 pont

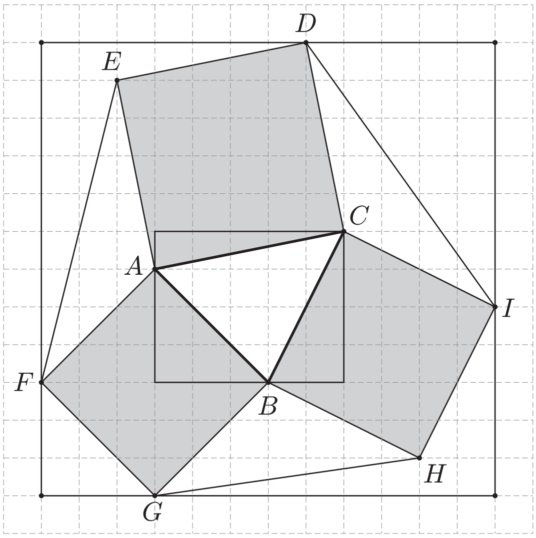
A $DEFGHI$ hatszög területe tehát $T = 18 + 20 + 26 + 4 \cdot 9 = 100$. 1 pont

---

Összesen: 7 pont

Megjegyzés: Az I. megoldás során az ABC háromszög területének kiszámításáért (9 egység) tehát 3 pont adható.

Az I. megoldásban bármely lehetséges meggondolás (3 lehetőség) esetén a „szélső” háromszögek területének kiszámításáért 3 pont jár.



II. megoldás. Észrevehetjük, hogy a hatszöget ügyesen belehelyezhetjük egy 12 egység oldalú négyzetbe az ábra szerint. 2 pont

A Pitagorasz-tétel segítségével leellenőrizhető, hogy az oldalak a feladatnak megfelelő nagyságúak. 2 pont

Ekkor a hatszög területét megkapjuk, ha a nagy négyzet területéből kivonjuk a sarkoknál elhelyezkedő felesleges háromszögek és négyszögek területét. 1 pont

Az E és H pontból a négyzet legközelebbi csúcsához húzott szakasszal a két négyszög háromszögekre bontható.

$$T = 12^2 - \frac{3\cdot 3}{2} - \frac{5\cdot 3}{2} - \frac{7\cdot 1}{2} - \frac{9\cdot 2}{2} - \frac{9\cdot 1}{2} - \frac{5\cdot 2}{2} = 100.$$ 2 pont

Összesen: 7 pont

3. Mekkora a területe annak a sokszögnek, amelyet az alábbi egyenletrendszer gyökei határoznak meg a derékszögű koordináta-rendszerben?

$$\left.\begin{aligned} xy + x + y &= 11 \\ x^2y + xy^2 &= 30 \end{aligned}\right\}$$

Megoldás. Legyen: $x + y = s$ és $xy = p$.

Így az egyenletrendszer

$$\left.\begin{aligned} ps &= 30 \\ p + s &= 11 \end{aligned}\right\}$$

alakban írható, melynek gyökei: $(5;6)$ illetve $(6;5)$. 1 pont

Visszahelyettesítve a jelölésbe, majd megoldva a kapott egyenletrendszereket az $(x;y)$ számpárra a következő értékeket kapjuk: $A(2;3)$; $B(3;2)$; $C(1;5)$; $D(5;1)$. 2 pont

Vizsgáljuk az $ABCD$ négyszöget. Az A és B pontok az $f(x) = -x + 5$ függvény grafikonján találhatók, a C és D pontok pedig a $g(x) = -x + 6$ függvény grafikonján vannak. Így $AB \parallel CD$, vagyis a négyszög trapéz. 2 pont

Pitagorasz-tétellel kiszámítjuk a trapéz oldalait és magasságát: $AB = \sqrt{2}$; $CD = 4\sqrt{2}$; $AC = BD = \sqrt{5}$; a trapéz magassága $m = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. 1 pont

A terület $T = \dfrac{AB + CD}{2} \cdot m = \dfrac{5}{2}$ területegység. 1 pont

Összesen: 7 pont

4. A valós számok halmazán értelmezett $f(x) = ax^2 + bx + c$ másodfokú függvénynek minimuma van, melynek értéke $-a$. Az $f(x)$ függvényre bármely x érték esetén $f(x) = f(1-x)$ teljesül. Adjuk meg az $f(x)$ függvény zérushelyeit!

Megoldás. A feladat feltételei alapján $a > 0$.

Mivel $f(x) = f(1-x)$ minden valós x-re, ezért $ax^2 + bx + c = a(1-x)^2 + b(1-x) + c$. A kapott összefüggés $2 \cdot (a+b)x = a + b$ alakra rendezhető. 1 pont

Például $x = 1$ esetén $a + b = 0$ következik, azaz $b = -a$. 1 pont

Ha pedig $b = -a$, akkor $f(x) = ax^2 - ax + c$, így pedig $f(x) = a\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + c - \frac{a}{4}$ (teljes négyzetté alakítással). 1 pont

Az $a > 0$ kikötés miatt a minimum helye $\frac{1}{2}$, a minimum értéke pedig $c - \frac{a}{4}$. 1 pont

Feladatunk alapján $c - \frac{a}{4} = -a$, így $c = -\frac{3}{4}a$. 1 pont

Tehát $f(x) = ax^2 - ax - \frac{3}{4}a$ alakú.

Ha pedig $a \neq 0$ – mint tudjuk –, akkor $f(x)$ zérushelyei az $x^2 - x - \frac{3}{4} = 0$ egyenlet gyökei. 1 pont

A zérushelyek (gyökök) $x_1 = -\frac{1}{2}$ és $x_2 = \frac{3}{2}$. 1 pont

Összesen: 7 pont