**Bolyai János**
**Matematikai Társulat**

Oktatásért Közalapítvány
támogatásával

# Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
# 2010/2011-es tanév
# első (iskolai) forduló
# haladók – II. kategória

**Megoldások és javítási útmutató**

**1.** Melyek azok a természetes számokból álló $(x;y)$ számpárok, amelyekre teljesül, hogy

$$\frac{x^y\cdot x^{2y}\cdot\sqrt{x^{3y}}}{x^{4y}}=\left(\sqrt{2}\right)^y\quad\text{és}\quad x+y=2010?$$

**Megoldás.** A tört értelmezésének megfelelően $x\neq 0$.

A hatványozás azonosságai alapján $x^y\cdot x^{2y}=x^{3y}$, valamint $\dfrac{x^{3y}}{x^{4y}}=\dfrac{1}{x^y}$.

Egyenletünk így $\dfrac{\sqrt{x^{3y}}}{x^y}=\left(\sqrt{2}\right)^y$ alakú. 1 pont

Mindkét oldal négyzetre emelésével $\dfrac{x^{3y}}{x^{2y}}=2^y$ adódik.

Így pedig $x^y=2^y$. 1 pont

Ekkor pedig $\dfrac{x^y}{2^y}=1$, azaz $\left(\dfrac{x}{2}\right)^y=1$ a tört hatványozására vonatkozó azonosság alapján. 1 pont

Az $\dfrac{x}{2}$ alap hatványa csak akkor lehet 1, ha az alap értéke 1 vagy $-1$, vagy pedig a kitevő 0. 1 pont

A három esetnek megfelelően a keresett számpárok

| $x$ | 2 | $-2$ | 2010 |
|---|---|---|---|
| $y$ | 2008 | 2012 | 0 |

. $1+1+1$ pont

Mindhárom számpár gyöke is az egyenletrendszernek.

Összesen: 7 pont

**2.** Hány olyan pozitív egész szám van, amely 2-es számrendszerben felírva 12-jegyű és nincs a felírásában két szomszédos 1-es számjegy?

**Első megoldás.** Az $n$ darab számjegyből álló megfelelő számok számát $f(n)$-nel jelölve, nyilvánvaló, hogy $f(1)=1$, $f(2)=1$, $f(3)=2$, $f(4)=3$, $f(5)=5$ stb. 1 pont

A kiszámított $f(n)$ értékek alapján sejthető, hogy bármely $n$ pozitív egész szám esetén $f(n+2) = f(n+1) + f(n)$. 1 pont

Sejtésünket a következő módon igazoljuk:

Bármely megfelelő $(n+2)$-jegyű szám utolsó számjegye 0 vagy 1 lehet.

Ha az utolsó számjegy 0, akkor az előtte álló $n+1$ darab számjegy $f(n+1)$-féleképpen adható meg. 1 pont

Ha pedig 1 az utolsó számjegy, akkor közvetlenül előtte csak 0 állhat. Ekkor az első $n$ darab „hely” megadásának száma $f(n)$-féle lehet. 1 pont

Tehát valóban igaz, hogy $f(n+2) = f(n+1) + f(n)$. 1 pont

Bizonyításunk alapján $f(6) = 8$, $f(7) = 13$, $f(8) = 21$, $f(9) = 34$, $f(10) = 55$, $f(11) = 89$, $f(12) = 144$. 1 pont

Tehát 144 darab megfelelő 12-jegyű szám van. 1 pont

---

Összesen: 7 pont

**Második megoldás.** A 12-jegyű szám első két számjegye csak 1 és 0 lehet (az „10” kétjegyű számmal lehet indulni). Ekkor a maradék 10 darab számjegyet kell megfelelő módon megadni. 1 pont

A hiányzó 10 darab számjegy a következő lehet:

(1) 5 darab 1-es, 5 darab 0,
(2) 4 darab 1-es, 6 darab 0,
(3) 3 darab 1-es, 7 darab 0,
(4) 2 darab 1-es, 8 darab 0,
(5) 1 darab 1-es, 9 darab 0,
(6) 0 darab 1-es, 10 darab 0. 1 pont

Az egyes esetekben a megfelelő „elhelyezések” száma:

| (1): 6, | (2): 35, | (3): 56, | (4): 36, | (5): 10, | (6): 1. |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 pont | 1 pont | 1 pont | 1 pont | | |

Összesen tehát $6 + 35 + 56 + 36 + 10 + 1 = 144$ darab megfelelő 12-jegyű szám van. 1 pont

---

Összesen: 7 pont

*Megjegyzés.* Ha az 1-esek száma $k$, a 0 számjegyek száma pedig $10-k$, ahol $k$ rendre 5, 4, 3, 2, 1, 0, akkor a 10 darab helyre $\binom{11-k}{k}$-féle módon lehet elhelyezni a számjegyeket. Hiszen $(10-k)$ darab 0 számjegyet egymás mellé írva az 1-es számjegyeket csak a 0 számjegyek közé vagy eléjük, illetve mögéjük írhatjuk, így az 1-es számjegyek elhelyezésére $10-k+1 = 11-k$ szabad hely marad. Megoldásunknak megfelelően rendre

$$\binom{6}{5} = 6, \quad \binom{7}{4} = 35, \quad \binom{8}{3} = 56, \quad \binom{9}{2} = 36, \quad \binom{10}{1} = 10, \quad \binom{11}{0} = 1.$$

**3.** Legfeljebb hány 0-ra végződhet a tízes számrendszerben az

$$1^n + 2^n + 3^n + 4^n$$

összeg, ahol $n$ tetszőleges pozitív egész szám?

**Megoldás.** Az $S_n = 1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ jelöléssel $S_1 = 10$, $S_2 = 30$, $S_3 = 100$, $S_4 = 354$. A kiszámított értékek alapján az összeg 0, 1, 2 darab 0-ra végződhet. 1 pont

Az $S_n$ összeget $n$ paritásától függően fogjuk vizsgálni.

(1) $n = 2k$, $k \in \mathbb{Z}^+$. Ekkor

$$S_n = S_{2k} = 1^{2k} + 2^{2k} + 3^{2k} + 4^{2k} = 1 + 4^k + 9^k + 16^k =$$
$$= 4^k + 16^k + \left(9^k - 1\right) + 2. \qquad \text{1 pont}$$

Ez az összeg 4-gyel osztva 2 maradékot ad, hiszen $4^k$, $16^k$ és $9^k - 1$ osztható 4-gyel.

Mivel $S_{2k} = 4m + 2$ alakú, $m \in \mathbb{Z}^+$, ezért $S_{2k}$ nem végződhet két darab 0-ra, mert $100 = 2^2 \cdot 5^2$. 1 pont

(2) $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{Z}^+$, mert $k = 0$-ra $S_1 = 10$.

$$S_n = S_{2k+1} = 1 + 2 \cdot 4^k + 3 \cdot 9^k + 4 \cdot 16^k =$$
$$= 2 \cdot 4^k + 4 \cdot 16^k + 3\left(9^k - 1\right) + 4. \qquad \text{1 pont}$$

$k > 0$ esetén a kapott összeg 8-cal osztva 4 maradékot ad, mert $2 \cdot 4^k$, $4 \cdot 16^k$ és $3\left(9^k - 1\right)$ osztható 8-cal. 1 pont

$S_{2k+1}$ tehát $8m + 4$ alakú, ahol $m \in \mathbb{Z}^+$, így pedig $S_{2k+1}$ nem végződhet három darab 0-ra, hiszen $10^3 = 2^3 \cdot 5^3$ és $S_{2k+1}$ nem osztható 8-cal. 1 pont

Két darab 0-ra viszont végződhet $S_n$, például $n = 3$ esetén. 1 pont

Összesen: 7 pont

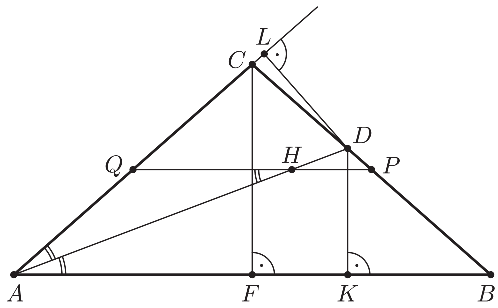
*Megjegyzés.* Megmutatjuk, hogy $n > 1$ esetén $S_n$ és $S_{n+20}$ utolsó két számjegye azonos. Ehhez elég belátni, hogy $S_{n+20} - S_{20}$ osztható 100-zal.

$$\begin{aligned} S_{n+20} - S_n &= 2^{n+20} + 3^{n+20} + 4^{n+20} - 2^n - 3^n - 4^n = \\ &= 3^n\left(3^{20} - 1\right) + 2^n\left(2^{20} - 1\right) + 4^n\left(4^{20} - 1\right) = \\ &= 3^n\left(3^{10} - 1\right)\left(3^{10} + 1\right) + 2^n\left(2^{10} - 1\right)\left(2^{10} + 1\right) + \\ &\quad + 4^n\left(2^{10} - 1\right)\left(2^{10} + 1\right)\left(4^{10} + 1\right). \end{aligned}$$

Az összeg mindhárom tagja osztható 4-gyel $(n>1)$ és 25-tel is, mert $25 \mid 3^{10}+1$, valamint $25 \mid 2^{10}+1$. Az előzőek alapján a különbség osztható 100-zal, hiszen 4 és 25 relatív prímek. Ez pedig azt jelenti, hogy $S_n$ és $S_{n+20}$ utolsó két jegye valóban azonos, ha $n>1$. Így pedig elegendő lenne $n=1,2,3,\dots,21$ esetén megvizsgálni, hogy hány 0-ra végződik $S_n$. Mint már tudjuk, legfeljebb kettőre. Ez pedig azt jelenti, hogy azt is tudjuk már, hogy milyen $n$ értékek esetén végződhet az $S_n$ összeg pontosan 0 darab, 1 darab vagy 2 darab 0-ra.

**4.** Az $AB$ alapú $ABC$ egyenlő szárú háromszög $BC$ oldalának felezőpontja $P$, $AC$ oldalának felezőpontja $Q$. Az $A$ csúcsból húzott belső szögfelező a $BC$ oldalt a $D$ pontban, míg a $PQ$ szakaszt a szakasz $H$ harmadolópontjában metszi. Hányadrésze a $HPD$ háromszög területe az $ABC$ háromszög területének?

**Megoldás.** Tekintsük a következő ábrát:




Az ábra jelöléseit használva legyen $AB=a$, $AC=BC=b$, $CF=m$. Az $AHQ$ háromszög egyenlő szárú, mert $QHA\sphericalangle = HAB\sphericalangle$, hiszen váltószögek, és $HAB\sphericalangle = HAQ\sphericalangle$, mert $AD$ szögfelező. 1 pont

Így pedig $AQ=QH=\frac{b}{2}$ és $QH=\frac{2}{3}\cdot\frac{a}{2}=\frac{a}{3}$, mert a $PQ$ középvonal $\frac{a}{2}$ hosszú, tehát $HP=\frac{a}{2}-\frac{a}{3}=\frac{a}{6}$. 1 pont

$\frac{b}{2}=\frac{a}{3}$ alapján $b=\frac{2}{3}a$. Megjegyezzük, hogy $\frac{b}{2}=\frac{a}{6}$ lehetetlen, azaz $H$ nem lehet a másik harmadolópont. (Ugyanis akkor a $QPC\triangle$-re nem teljesülne a háromszög-egyenlőtlenség.) 1 pont

$DK=DL$, mert $D$ a szögfelező pontja. A $DK=DL=d$ és a $CF=m$ jelöléssel az $ABC$ háromszög területe egyrészt $\frac{am}{2}$, másrészt $t_{ABD}+t_{ACD}=\frac{ad}{2}+\frac{bd}{2}$. 1 pont

Így pedig $am=d(a+b)$ alapján

$$d=\frac{a}{a+b}m=\frac{a}{a+\frac{2}{3}a}m=\frac{3}{5}m.$$ 1 pont

A $HPD$ háromszög $HP$ oldalához tartozó magassága $d-\frac{m}{2}$ az ábrának megfelelően.

$$d-\frac{m}{2}=\frac{3}{5}m-\frac{m}{2}=\frac{m}{10}.$$ 1 pont

A $HPD$ háromszög területe

$$\frac{1}{2}HP\cdot\frac{m}{10}=\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{6}\cdot\frac{m}{10}=\frac{1}{60}\,t_{ABC}.$$ 1 pont

Tehát a $HPD$ háromszög területe az eredeti háromszög területének hatvanad része.

---

Összesen: 7 pont

**5.** Artúr király testőrei lovagi tornát vívtak. A torna végén kiderült, hogy a király bármely két testőréhez tud találni egy harmadikat, aki mindkettőjüket legyőzte. Legalább hány testőr vett részt a tornán? (Két lovag legfeljebb egyszer vívott egymással.)

**Megoldás.** Válasszuk ki a király tetszőleges testőrét, $A$-t. Neki biztosan volt legyőzője, legyen ez $B$. A feltételek szerint volt olyan $C$ lovag, aki mindkettőjüket legyőzte. Viszont kell lenni egy negyedik lovagnak is, legyen ő $D$, aki legyőzte $A$-t és $C$-t is. 1 pont

Eszerint $A$-nak – azaz egy tetszőleges lovagnak – legalább 3 legyőzője volt ($B$, $C$ és $D$). 1 pont

Tegyük fel, hogy $k$ lovag volt. Akkor mindnyájan kikaptak legalább 3-szor, azaz a párbajok száma legalább $3k$. Ha az összes lehetséges párosításban vívtak, akkor $k(k-1)/2$ párbaj volt. 1 pont

Így teljesülnie kell a $3k \leqq k(k-1)/2$ egyenlőtlenségnek. 1 pont

Ennek megoldása (mivel $k$ pozitív) a $k \geqq 7$. 1 pont

A $k=7$ eset megvalósulhat. Ennek igazolása pl. táblázattal vagy gráf felrajzolásával történhet. 2 pont

Pl. táblázattal:

GYŐZÖTT

VESZTETT

| | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ | $E$ | $F$ | $G$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | – | x | x | x | | | |
| $B$ | | – | x | | x | x | |
| $C$ | | | – | x | x | x | |
| $D$ | | x | | – | | x | x |
| $E$ | x | | | x | – | | x |
| $F$ | x | | | | x | – | x |
| $G$ | x | x | x | | | | – |

---

Összesen: 7 pont