Bolyai János
Matematikai Társulat

Oktatásért Közalapítvány
támogatásával

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2010/2011-es tanév
3. (döntő) forduló
haladók I. kategória

Feladatok

1. Bizonyítsuk be, hogy nincs megoldása az $x^2 + y^3 = z^4$ egyenletnek, ha x, y és z pozitív prímek!

2. Bizonyítsuk be, hogy ha egy derékszögű trapéz átlói merőlegesek egymásra, akkor a trapéz területe nem lehet nagyobb az oldalak négyzetének számtani közepénél.

3. Három gép olyan számkártyákkal működik, amelyeken pozitív egészekből álló rendezett számpárok találhatók. Mindhárom gép új számkártyák kinyomtatására képes, a következő szabályok szerint:

- Az első gépbe az $(a,\ b)$ kártyát táplálva az $(a+1,\ b+1)$ kártyát nyomtatja ki.
- A második gép az $(a,\ b)$ kártya beadására az $\left(\frac{a}{2},\ \frac{b}{2}\right)$ kártyát adja ki, de csak akkor, ha a és b páros. Más esetekben nem nyomtat.
- A harmadik gépbe két kártyát kell betölteni: az $(a,\ b)$ és $(b,\ c)$ kártyák betöltése esetén az $(a,\ c)$ kártyát nyomtatja ki. Csak akkor nyomtat, ha két olyan kártyát adunk be (megfelelő sorrendben), hogy az első kártya második száma egyenlő a második kártya első számával.

Mindhárom gép visszaadja a betáplált kártyákat is, függetlenül attól, hogy történt-e nyomtatás.

Kezdetben egyetlen kártyánk van, az $(1,\ 27)$. Legyártható-e

$a)$ az $(1,\ 2011)$;

$b)$ a $(99,\ 333)$ kártya?

Az eredményhirdetést 2011. május 13-án (pénteken) 14.00 órai kezdettel tartjuk az MTA Rényi Alfréd MKI Nagytermében (Budapest, V. ker., Reáltanoda u. 13–15.).