Bolyai János
Matematikai Társulat

Oktatásért Közalapítvány
támogatásával

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2010/2011-es tanév
2. forduló
haladók I. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Egy adott négyzet mindegyik oldalán kijelöltünk a csúcsoktól különböző 3–3 darab pontot. Összesen hány konvex négyszöget határoz meg a felvett 12 darab pont?

Megoldás. Egy négyszöget a csúcsai határozzák meg. A négy csúcs közül legfeljebb kettő lehet egy négyzetoldalon.

A négy darab kiválasztott pont elhelyezkedhet

1) két négyzetoldalon; $2+2$ bontásban;

2) három négyzetoldalon; $2+1+1$ bontásban, valamilyen sorrendben;

3) négy darab négyzetoldalon; $1+1+1+1$ bontásban. 1 pont

Az 1) esetben $\binom{4}{2}\cdot 3\cdot 3=54$ darab megfelelő négyszög van. 2 pont

A 2) esetben $\binom{4}{1}\cdot 3\cdot\binom{3}{2}\cdot 3\cdot 3=324$ négyszög lehetséges. 2 pont

A 3) esetben a négyszögek száma $3^4=81$. 1 pont

A megfelelő négyszögek száma összesen $54+324+81=459$. 1 pont

Összesen: 7 pont

Megjegyzés. Ha a négyzet mindegyik oldalán n darab pontot jelöltünk volna ki, akkor a megfelelő négyszögek száma a megoldás gondolatmenete alapján

$$\binom{4}{2}\cdot\binom{n}{2}\cdot\binom{n}{2}+\binom{4}{1}\cdot\binom{n}{2}\cdot\binom{3}{2}\cdot\binom{n}{1}\cdot\binom{n}{1}+n^4=$$

$$=\frac{3}{2}\cdot n^2(n-1)^2+6n^3(n-1)+n^4=\frac{n^2}{2}\left(17n^2-18n+3\right)$$

lenne. Az általánosított formula $n=3$-ra éppen 459-et ér.

2. Határozzuk meg azokat a p prímeket, melyekre a $p^2 + 11$ számnak pontosan 6 db pozitív osztója van!

1. megoldás. Egy számnak akkor van pontosan 6 db osztója, ha q^5 vagy $q^2 r$ alakú, ahol q és r különböző prímszámok. 1 pont

Ha $p = 2$, akkor $p^2 + 11 = 15 = 3 \cdot 5$, aminek $2 \cdot 2 = 4$ pozitív osztója van, így p csak páratlan prímszám lehet. 1 pont

Tehát $p = 4k \pm 1$ alakú. Ekkor

$$p^2 + 11 = (4k \pm 1)^2 + 11 = 16k^2 \pm 8k + 1 + 11 = 4\bigl(4k^2 \pm 2k + 3\bigr)$$

alakú, tehát osztható 4-gyel. 1 pont

Ha $p^2 + 11 = q^5$, a 4-gyel oszthatóság miatt csak $q = 2$ lehet, tehát $p^2 + 11 = 32$, ebben az esetben nem kapunk megoldást. 1 pont

Ha $p^2 + 11 = q^2 r$, a 4-gyel oszthatóság miatt ismét csak $q = 2$ lehet. Ha $p = 3l \pm 1$ alakba írható, akkor

$$p^2 + 11 = (3l \pm 1)^2 + 11 = 9l^2 \pm 6l + 1 + 11 = 3\bigl(3l^2 \pm 2l + 4\bigr),$$

tehát osztható 3-mal is, amiből $r = 3$ következik. Innen $p^2 + 11 = 12$, ami szintén nem ad megoldást. 2 pont

Marad a $p = 3$ eset, ami $p^2 + 11 = 20 = 2^2 \cdot 5$ miatt megfelelő. Más eset nincs, így a feladat egyetlen megoldása a $p = 3$. 1 pont

---

Összesen: 7 pont

2. megoldás. Ha $p = 2$, akkor $p^2 + 11 = 15 = 3 \cdot 5$, aminek $2 \cdot 2 = 4$ pozitív osztója van, ez nem megoldás. 1 pont

Ha $p = 3$, akkor $p^2 + 11 = 20 = 2^2 \cdot 5$, aminek $3 \cdot 2 = 6$ pozitív osztója van, tehát ez megoldása az egyenletnek. 1 pont

Megmutatjuk, hogy más megoldás nincs.

Ha $p > 3$, akkor végezzük el a $p^2 + 11 = (p + 1)(p - 1) + 12$ átalakítást. 1 pont

Mivel mivel p páratlan és nem osztható 3-mal, $p + 1$ és $p - 1$ is páros és az egyikük osztható 3-mal is, tehát a szorzatuk, így $p^2 + 11$ is osztható 12-vel. 2 pont

Továbbá $p^2 + 11 > 12$, ezért van legalább 7 különböző osztója, ezek a $p^2 + 11$, valamint a 12 osztói (1, 2, 3, 4, 6, 12). Tehát $p > 3$ valóban nem lehetséges. 2 pont

---

Összesen: 7 pont

3. Bizonyítsa be, hogy ha 2^n-nek a tízes számrendszerbeli alakjából levágjuk az utolsó számjegyét és ezzel megszorozzuk az előtte álló jegyekből alakuló számot, akkor a szorzat osztható 6-tal ($n > 3$)!

Megoldás. A 2 hatványok végződése négyes periódus szerint változik: 2, 4, 8, 6, 2, ... stb. 1 pont

Így ha a hatvány 2^{4k}, az utolsó számjegy 6, így a szorzat mindig osztható lesz 6-tal. 1 pont

Más esetben a hatvány 2^{4k+i}, ($i = 1$, 2 vagy 3), ennek végződése éppen 2^i, a levágás után keletkezett szám így $\dfrac{2^{4k+i} - 2^i}{10}$. 1 pont

Mivel a levágott szám páros, a 6-tal való oszthatósághoz azt kell belátni, hogy a fenti kifejezés osztható 3-mal. 1 pont

Ehhez elég a számlálót vizsgálni, mivel $(3;10) = 1$.

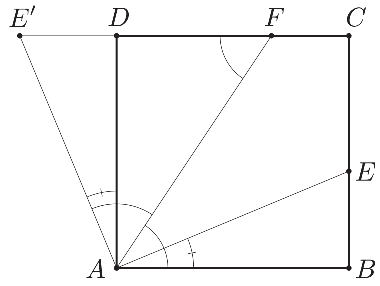
$$2^{4k+i} - 2^i = 2^i\left(2^{4k} - 1\right) = 2^i\left(2^{2k} - 1\right)\left(2^{2k} + 1\right). \qquad 1 \text{ pont}$$

Mivel $2^{2k} - 1$, 2^{2k} és $2^{2k} + 1$ 3 egymást követő szám, az egyik biztosan osztható 3-mal, ez nem lehet a középső, így az előző szorzat 2. vagy 3. tényezője biztosan osztható lesz 3-mal. 2 pont

Összesen: 7 pont

4. Az $ABCD$ négyzet BC, illetve CD oldalán úgy vettük fel az E és F pontot, hogy $BE + DF = AE$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor AF felezi az EAD szöget.

Megoldás.



Alkalmazzunk 90°-os (BAD szögű) forgatást A körül! Ekkor B átmegy D-be, E pedig a CD félegyenes E' pontjába. 2 pont

Ekkor a feltétel alapján

$$FE' = FD + DE' = FD + BE = AE = AE'. \qquad 1 \text{ pont}$$

Tehát AFE' háromszög egyenlőszárú, így $E'AF$ szög egyenlő $E'FA$ szöggel, amivel egyenlő FAB szög is, hiszen váltószögek. Így AF felezi $E'AB$ szöget. 2 pont

Másrészt EAB szög elforgatottja $E'AD$ szög, tehát ezek egyenlőek egymással. Így az elhagyásukkal maradó két szög: $DAF = E'AF - E'AD$ és $FAE = FAB - EAB$ is egyenlő, és ezt kellett bizonyítani. 2 pont

Összesen: 7 pont