Bolyai János
Matematikai Társulat

Oktatásért Közalapítvány
támogatásával

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2010/2011-es tanév
első (iskolai) forduló
haladók – I. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Van 11 érménk, melyek értéke rendre: 7, 300, 35, 83, 1, 17, 2, 1, 17, 170 és 5 fabatka. Melyik az a legkisebb pozitív egész összeg, ami visszaadás nélkül nem fizethető ki ezekkel az érmékkel?

Megoldás. A 17-nél kisebb értékeket mind ki tudjuk fizetni:

$$1, \quad 2, \quad 1+2=3, \quad 1+1+2=4, \quad 5, \quad 1+5=6, \quad 7, \quad 1+7=8, \quad 2+7=9,$$
$$1+2+7=10, \quad 1+1+2+7=11, \quad 5+7=12, \quad 1+5+7=13,$$
$$2+5+7=14, \quad 1+2+5+7=15, \quad 1+1+2+5+7=16.$$ 2 pont

Mivel van 17 fabatkás érménk, $16+17=33$-ig is minden kifizethető, hiszen 1-től 16-ig minden összeg megvan, és ezeket a 17 fabatkás érmével kiegészítve megkapjuk a 18 és 33 közötti összegeket. A 17-et pedig egyetlen érmével kifizetjük. 1 pont

Innen már látszik az általános módszer. Rendezzük nagyság szerint az érméket:

$$1, \quad 1, \quad 2, \quad 5, \quad 7, \quad 17, \quad 17, \quad 35, \quad 83, \quad 170, \quad 300.$$

Jelölje ebben a sorrendben az érmék értékét: $a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq \ldots \leqq a_{11}$. (Tehát $a_1 = 1$ és $a_{11} = 300$.)

A lehetséges összegeket növekvő sorrendben állítjuk elő. Az első k érmét felhasználva legfeljebb $s_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$ fizethető ki. Tegyük fel, hogy 1 és s_k között minden érték elő is áll.

Most nézzük az a_{k+1} érmét. Ha $a_{k+1} > s_k + 1$, akkor $s_k + 1$ nem fizethető ki. Ha $a_{k+1} \leqq s_k + 1$, akkor a fenti gondolatmenettel $s_{k+1} = s_k + a_k$-ig minden összeg kifizethető.

Tehát azt kell megkeresnünk, hogy hol fordul elő először, hogy $a_{k+1} > s_k + 1$, és ekkor $s_k + 1$ a legkisebb kifizethetetlen összeg. 2 pont

Az alábbi táblázat alapján adódik a válasz:

a_k	1	1	2	5	7	17	17	35	83	170	300
s_k	1	2	4	9	16	33	50	85	168		

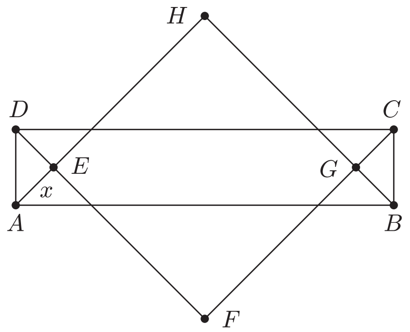
Tehát a legkisebb kifizethetetlen összeg a 169. 2 pont

Összesen: 7 pont

Megjegyzés: Az első 2 pont megszerzéséhez nem kell 16-ig elmenni, de néhány „kis” összeg előállítását fel kell írni.

2. Egy téglalap egyik oldala a másik ötszöröse. A téglalap szögfelezői által meghatározott négyszög területe 32 cm^2. Mekkora a téglalap területe?

Megoldás.



Az $EFGH$ négyszög négyzet, mert egyrészt az $ABCD$ téglalap szögfelezői a téglalap szögeit 45°-os darabokra vágják, így $AED\sphericalangle$, $DFC\sphericalangle$, $BGC\sphericalangle$, $BHA\sphericalangle$ derékszögek, azaz a négyszög téglalap, 2 pont

másrészt az $ABCD$ téglalap szimmetrikus oldalfelező merőlegeseire, és ha bármelyik szögfelezőt tükrözzük valamelyik oldalfelező merőlegesre, akkor egy másik szögfelezőt kapunk, ezért a szögfelezők az oldalfelező merőlegeseken metszik egymást, így az $EFGH$ négyszög szimmetrikus átlóira, tehát rombusz. Így $EFGH$ négyzet. 2 pont

A négyzet területe 32 cm^2, így oldala $4\sqrt{2}$ cm. Legyen $AE = DE = BG = CG = x$, ekkor $AH = HB = x + 4\sqrt{2}$ cm. 1 pont

Az egyenlőszárú derékszögű háromszög átfogója a befogók $\sqrt{2}$-szöröse. A téglalap oldalaira így az alábbi összefüggés írható fel: $5x\sqrt{2} = \left(x + 4\sqrt{2}\right)\sqrt{2}$, ahonnan $x = \sqrt{2}$ cm. 1 pont

A téglalap oldalai 2 cm, 10 cm, tehát területe 20 cm^2. 1 pont

Összesen: 7 pont

3. Bizonyítsuk be, hogy ha a, b, c olyan természetes számok, hogy $9 \mid a^3 + b^3 + c^3$, akkor az a, b, és c közül valamelyik osztható 3-mal.

Megoldás. Az állítást indirekt módon igazoljuk. Tegyük fel, hogy $9 \mid a^3 + b^3 + c^3$ és az a, b, c számok közül egyik sem osztható 3-mal. 1 pont

Ez azt jelenti, hogy mindegyik 3-mal osztva 1 vagy -1 maradékot ad: $a = 3k + x$, $b = 3l + y$, $c = 3m + z$, ahol k, l, m egészek, és x, y, z 1 vagy -1. 1 pont

Felhasználva, pl. hogy $a^3 = (3k + x)^3 = 27k^3 + 27k^2x + 9kx^2 + x^3$,

$$a^3 + b^3 + c^3 = 9 \cdot A + x^3 + y^3 + z^3,$$

ahol A természetes szám. 3 pont

Mivel x, y, z 1 vagy -1, az $x^3 + y^3 + z^3$ összeg csak -3, -1, 1, vagy 3 lehet, ezért $a^3 + b^3 + c^3$ nem osztható 9-cel. 1 pont

A kapott ellentmondás alapján az indirekt feltétel hamis, tehát a, b, c közül legalább az egyik osztható 3-mal. 1 pont

Összesen: 7 pont

4. Egy egyenlőszárú háromszög valamelyik súlyvonalának hossza megegyezik az egyik középvonal hosszával. Mekkora lehet a háromszög legnagyobb szöge?

Megoldás. Két különböző hosszúságú középvonal és két különböző hosszúságú súlyvonal van egy egyenlőszárú háromszögben, így négy esetet kell megvizsgálni. 2 pont

1. Az alaphoz tartozó súlyvonal hossza egyezik meg az alappal párhuzamos középvonal hosszával – a két szakasz merőleges egymásra, felezik egymást és egyenlő hosszúak, tehát egy négyzet két átlóját adják, az alappal szemközti szög így 90°, ez lesz a legnagyobb szög. 2 pont
2. Az alaphoz tartozó súlyvonal hossza egyezik meg az a szárral párhuzamos középvonal hosszával. Ekkor ezek hossza a szárak hosszának fele, és az egyenlőszárúság miatt ennyi a másik szár felezőpontjától a csúcsig terjedő szakasz is. Így egy szabályos háromszög keletkezett, az alappal szemközti szög fele 60°, a háromszög legnagyobb szöge 120°. 2 pont

3–4. Ha a szárhoz tartozó súlyvonal hossza egyezne meg valamelyik középvonal hosszával, akkor olyan egyenlőszárú háromszögeknek kellene keletkezniük, amelyeknek egyik alapon fekvő szöge tompaszög, így ezek az esetek nem valósulhatnak meg. 1 pont

Összesen: 7 pont

5. Tudjuk, hogy az $x^2 - px + 4^{10} = 0$ egyenletnek két különböző gyöke van, amelyek pozitív egész páros számok. Hányféle különböző értékű lehet a p paraméter?

Első megoldás. A feltételek alapján legyen a két gyök x_1 és x_2, ahol $x_1 = 2k$, $x_2 = 2n$, amelyekre $k, n \in \mathbb{Z}^+$ és $k < n$ teljesül. Mivel $2k$ és $2n$ az egyenlet gyökei, ezért

$$4n^2 - 2pn + 4^{10} = 0, \tag{1}$$

$$4k^2 - 2pk + 4^{10} = 0. \tag{2}$$

1 pont

$(1) - (2)$ alapján $4n^2 - 4k^2 - 2pn + 2pk = 0$, azaz $2(n-k)(n+k) - p(n-k) = 0$, így pedig $k \neq n$ miatt $p = 2(n+k)$ adódik. 1 pont

A $p = 2(n+k)$ összefüggést (1)-be helyettesítve a $4n^2 - 4(n+k)n + 4^{10} = 0$, ahonnan pedig az $nk = 4^9 = 2^{18}$ egyenlőséghez jutunk. 1 pont

Mivel 2 prímszám, ezért k és n 2-nek természetes számú kitevőjű hatványai lehetnek csak. 1 pont

A $k < n$ feltevés alapján így k és n lehetséges értékei a következők:

k	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8
n	2^{18}	2^{17}	2^{16}	2^{15}	2^{14}	2^{13}	2^{12}	2^{11}	2^{10}

. 1 pont

Tehát 9 különböző megfelelő $p = 2(n+k)$ értéket kaphatunk. Könnyen ellenőrizhető, hogy a megadott $(k;n)$ értékpárokra kapható $p = 2(k+n)$ értékek mind különbözők, hiszen $2^0 + 2^{18} > 2^1 + 2^{17} > 2^2 + 2^{16} > \ldots > 2^8 + 2^{10}$. 1 pont

Így pedig a p paraméter értéke 9-féle lehet, és valamennyi érték meg is felel a feladat feltételeinek. 1 pont

Összesen: 7 pont

Második megoldás. A gyökök és együtthatók közötti összefüggések alapján $x_1 + x_2 = p$, ahol p pozitív páros szám 1 pont
és $x_1 x_2 = 4^{10} = 2^{20}$. 1 pont

Ha például $x_1 < x_2$, akkor a feladat feltételei alapján egyrészt x_1 és x_2 csak 2 pozitív egész kitevőjű hatványa lehet, hiszen 2 prímszám, 1 pont
másrészt pedig így az $(x_1;x_2)$ számpárok értéke csak $\left(2^1;2^{19}\right)$, $\left(2^2;2^{18}\right)$, $\left(2^3;2^{17}\right)$, $\left(2^4;2^{16}\right)$, $\left(2^5;2^{15}\right)$, $\left(2^6;2^{14}\right)$, $\left(2^7;2^{13}\right)$, $\left(2^8;2^{12}\right)$, $\left(2^9;2^{11}\right)$ lehet. 1 pont

Tehát $x_1 + x_2 = p$ értéke így legfeljebb 9-féle lehet. 1 pont

Mind a 9 esetben különböző értékeket is kapunk például az első megoldásnak megfelelően. 2 pont

Összesen: 7 pont

Harmadik megoldás (vázlat). A megoldóképlet alapján az egyenlet D diszkriminánsa: $D = p^2 - 4^{11} > 0$. 1 pont

Mivel $x_1 + x_2 = p$, ahol x_1 és x_2 az egyenlet gyökei, ezért az $x_{1,2} = \dfrac{p \pm \sqrt{p^2 - 4^{11}}}{2}$ képlet alapján $p^2 - 4^{11}$ csak négyzetszám lehet, ahol p páros pozitív egész szám. 1 pont

A $p^2 - 4^{11} = q^2$ jelöléssel $\left(q \in \mathbb{Z}^+\right)$ $(p-q)(p+q) = 2^{22}$ adódik. 1 pont

A $(p-q)$ és a $(p+q)$ tényező is csak 2 pozitív egész kitevőjű hatványa lehet, hiszen 2 prímszám. A $p-q < p+q$ egyenlőtlenség alapján $p+q$ értékei 2^{12}, 2^{13}, 2^{14}, 2^{15}, 2^{16}, 2^{17}, 2^{18}, 2^{19}, 2^{20}. 1 pont

Mind a 9 lehetséges esetben 9 darab különböző p értékhez jutunk az előző két megoldás alapján. 3 pont

Összesen: 7 pont