Bolyai János

Matematikai Társulat

Oktatási és Kulturális Minisztérium
Támogatáskezelő Igazgatósága
támogatásával

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2009/2010-es tanév
1. forduló
haladók III. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Bizonyítsuk be, hogy egy pitagoraszi számhármasnak mindig van két olyan eleme, amelyek négyzetének különbsége osztható 7-tel.

(Pitagoraszi számhármason három olyan a, b, c természetes számot értünk, amelyekre teljesül az $a^2 + b^2 = c^2$ összefüggés.)

Megoldás.

Írjuk a számokat a 7-tel való oszthatóság szerint $7k \pm r$ alakba, ahol $r = 0, 1, 2, 3$. 1 pont

Ekkor egy ilyen szám négyzete: $(7k \pm r)^2 = 49k^2 \pm 14kr + r^2 = 7n + r^2$ alakú.

Az ilyen számok héttel osztva 0, 1, 4 vagy 2 maradékot adhatnak. 1 pont

Készítsünk egy táblázatot két szám négyzetének héttel való osztási maradékairól olymódon, hogy a táblázat sorai elé a^2, oszlopai fölé b^2, a táblázatba pedig $a^2 + b^2$ 7-tel való osztási maradékát írjuk.

	0	1	2	4
0	0	1	2	4
1	1	2	$\cancel{3}$	$\cancel{5}$
2	2	$\cancel{3}$	4	$\cancel{6}$
4	4	$\cancel{5}$	$\cancel{6}$	1

2 pont

Mivel egy szám négyzetének 7-tel vett osztási maradéka csak 0, 1, 2 vagy 4 lehet, töröltünk hat számot, mint a pitagoraszi számhármasban lehetetlen esetet. Így a lehetséges összetartozó értékek az első sorban, az első oszlopban, vagy a főátlóban találhatók. 1 pont

Az első sorban lévő értékekre $c^2 - b^2$, az első oszlopban lévő értékekre $c^2 - a^2$, a főátlóban lévő értékekre $a^2 - b^2$ osztható héttel. Ezzel az állítást bizonyítottuk. 2 pont

---

Összesen: 7 pont

2. Melyek azok a pozitív egész számok, amelyek 2010-zel nagyobbak számjegyeik négyzetösszegénél?

Megoldás. A keresett számok nem lehetnek négyjegyűnél kisebbek, mert a legnagyobb háromjegyű szám 999, ez pedig kisebb, mint 2010. 1 pont

A keresett számok ötjegyűek sem lehetnek, mert a legkisebb ötjegyű szám 10 000, ami nagyobb $2010 + 5 \cdot 9^2$-nél, azaz 2415-nél, és az ötjegyű számok négyzetösszegének maximuma $5 \cdot 9^2 = 405$ lehet. 1 pont

A teljes indukció módszerének alkalmazásával könnyen igazolható, hogy a számjegyek száma 5-nél nagyobb sem lehet.

Ekkor pedig a keresett számok csak négyjegyűek lehetnek. 1 pont

Ha a megfelelő négyjegyű szám $1000a + 100b + 10c + d$ alakú, ahol $a > 0$ és a, b, c, d számjegyek, akkor $1000a + 100b + 10c + d = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2010$ alapján az a értéke legfeljebb 2 lehet, hiszen $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2010 \leqq 4 \cdot 81 + 2010 = 2334$.

Ha a értéke 1 lenne, akkor $1000a + 100b + 10c + d < 2000$, míg a másik oldalon álló szám legalább 2010, így ellentmondásra jutunk. 1 pont

Ha pedig $a = 2$, akkor $100b + 10c + d = b^2 + c^2 + d^2 + 14$.

A kapott formulából leolvasható, hogy $b = 1$ vagy $b = 0$, az előzőekhez hasonló becslésekkel.

$b = 1$ esetén

$$\left(85 + d - d^2\right) + \left(10c - c^2\right) = 0$$

adódik, ami soha nem teljesül, mert $85 + d - d^2 > 0$ és $10c - c^2 \geqq 0$. Tehát b értéke csak 0 lehet. 1 pont

Ekkor pedig $10c + d = c^2 + d^2 + 14$, azaz

$$0 = c^2 - 10c + d^2 - d + 14, \quad \text{így pedig} \quad 11 = (c-5)^2 + d(d-1).$$

A kapott formula alapján $d < 4$.

Így pedig $11 - d(d-1)$ értéke négyzetszám, ami csak $d = 2$ esetén lehetséges. 1 pont

Ennek megfelelően a keresett számok 2022, illetve 2082. 1 pont

Összesen: 7 pont

3. Az a, b, x, y valós számokra teljesülnek a következő összefüggések: $ax + by = 3$, $ax^2 + by^2 = 7$, $ax^3 + by^3 = 16$ és $ax^4 + by^4 = 42$.

Határozzuk meg $ax^5 + by^5$ értékét!

Megoldás. A feltételekből megpróbáljuk xy és $x + y$ értékét meghatározni, majd ezek segítségével kifejezni a kérdéses mennyiséget.

$ax^3 + by^3 = 16$, ezért $\left(ax^3 + by^3\right)(x + y) = 16(x + y)$, így

$$ax^4 + by^4 + xy\left(ax^2 + by^2\right) = 16(x + y).$$

Innen

$$(*) \qquad 42 + 7xy = 16(x+y). \qquad 1 \text{ pont}$$

$ax^2 + by^2 = 7$, ezért $\left(ax^2 + by^2\right)(x+y) = 7(x+y)$, vagyis

$$ax^3 + by^3 + xy(ax+by) = 7(x+y).$$

Innen

$$(**) \qquad 16 + 3xy = 7(x+y). \qquad 1 \text{ pont}$$

A $(*)$–$(**)$ egyenletrendszer megoldható $x+y$-ra és xy-ra: $(*)$ 3-szorosából $(**)$ 7-szeresét levonva

$$42 \cdot 3 - 16 \cdot 7 = (16 \cdot 3 - 7 \cdot 7) \cdot (x+y) \implies 14 = -(x+y).$$

Tehát $x + y = -14$ és ezt $(**)$-ba visszaírva $xy = -38$. 2 pont

Végül $\left(ax^4 + by^4\right)(x+y) = 42(x+y)$, így $ax^5 + by^5 + xy\left(ax^3 + by^3\right) = 42(x+y)$, tehát

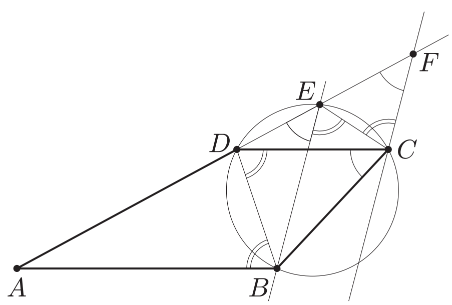
$$ax^5 + by^5 = 42(x+y) - 16xy = 20. \qquad 3 \text{ pont}$$

Összesen: 7 pont

4. $ABCD$ trapézban AB párhuzamos CD-vel. Jelölje E az AD egyenes és a BCD háromszög köré írt kör D-től különböző metszéspontját, F pedig az AD egyenes és a C-ből BE-hez húzott párhuzamos egyenes metszéspontját. (D az A és az E pont között van.)

Bizonyítsuk be, hogy a BC szakasz az AD és EF szakaszok mértani közepe!

Megoldás.



Ábra. 1 pont

Bizonyítani kell, hogy

$$BC^2 = AD \cdot EF, \quad \text{azaz} \quad \frac{BC}{EF} = \frac{AD}{BC}. \qquad 1 \text{ pont}$$

$EFC\sphericalangle = DEB\sphericalangle$ ($BE \parallel CF$, egyállású szögek).

$DEB\sphericalangle = DCB\sphericalangle$ (kerületi szögek).

Tehát

$$(a) \qquad EFC\sphericalangle = DCB\sphericalangle.$$

$FCE\sphericalangle = CEB\sphericalangle$ (váltószögek).

$CEB\sphericalangle = CDB\sphericalangle$ (kerületi szögek).

Tehát

$$(b) \qquad FCE\sphericalangle = CDB\sphericalangle.$$

(1 pont, ha az (a) vagy (b) közül bármelyiket felismeri).

Mivel:

$$EFC\sphericalangle = DCB\sphericalangle,$$
$$FCE\sphericalangle = CDB\sphericalangle,$$

ezért az $EFC\Delta \cong BCD\Delta$. Ebből következik:

$$\frac{BC}{EF} = \frac{BD}{EC} = \frac{DC}{CF}$$ 1 pont

(1. összefüggés).

$BEC\sphericalangle = CDB\sphericalangle$ (kerületi szögek).

$CDB\sphericalangle = DBA\sphericalangle$ (váltószögek).

Tehát

$$(c) \qquad BEC\sphericalangle = DBA\sphericalangle.$$

$EBC\sphericalangle = EDC\sphericalangle$ (kerületi szögek).

$EDC\sphericalangle = DAB\sphericalangle$ ($DC \parallel AB$, egyállású szögek).

Tehát

$$(d) \qquad EBC\sphericalangle = DAB\sphericalangle.$$

(1 pont, ha a (c) vagy (d) közül bármelyiket felismeri).

Mivel:

$$BEC\sphericalangle = DBA\sphericalangle,$$
$$EBC\sphericalangle = DAB\sphericalangle,$$

ezért az $EBC\Delta \cong ABD\Delta$. Ebből következik:

$$\frac{AD}{BC} = \frac{BD}{EC} = \frac{AB}{BE}$$ 1 pont

(2. összefüggés).

1. és 2. összefüggést figyelembe véve, felírható:

$$\frac{AD}{BC} = \frac{BD}{EC} = \frac{BC}{EF},$$

vagyis

$$BC^2 = AD \cdot EF,$$ 1 pont

amit igazolni kellett.

Összesen: 7 pont

5. Legyen e_n a következő módon definiált egyenes:

$$e_n: \quad y = \frac{6(n-x)}{n(n+1)(n+2)} \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Legyen H_n az e_n egyenes, az x-tengely és az y-tengely által meghatározott háromszög, és legyen U_n a $H_1, H_2, \ldots, H_n$ háromszögek egyesítésével kapott sokszög.

Mekkora az U_{2010} területe?

Megoldás. Az e_n egyenest definiáló egyenletbe $y = 0$-t, illetve $x = 0$-t helyettesítve megkapjuk az e_n tengelymetszeteit. Az n-edik e_n egyenes az x-tengelyt $x = n$-nél, 1 pont

míg az y-tengelyt $y = \dfrac{6}{(n+1)(n+2)}$-nél metszi, vagyis valóban létezik a H_n háromszög, és (mivel a fenti kifejezések pozitívak, ha $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$) az is igaz, hogy minden ilyen háromszög az első síknegyedbe esik.

Sőt, mivel n növelésével az egyenesek x-tengellyel vett metszéspontjai által meghatározott $a_n = \{n\}$ sorozat növekvő, míg az y-tengellyel vett metszéspontjaik által meghatározott

$$b_n = \frac{6}{(n+1)(n+2)}$$

sorozat csökkenő, így bármely két egyenes az első síknegyedben metszi egymást. (Az I. síknegyedben nézve „kezdetben a kisebb indexű egyenes van a nagyobb indexű fölött, majd fordul ez a viszony”.)

Vizsgáljuk két szomszédos indexű e_n, és e_{n+1} egyenes metszéspontját!

Kicsit átalakítva az e_n-t definiáló $y = \dfrac{6(n-x)}{n(n+1)(n+2)}$ kifejezést

$$\frac{yn(n+1)(n+2)}{6} = n - x \tag{1}$$

adódik, míg hasonlóan e_{n+1}-re $y = \dfrac{6(n+1-x)}{(n+1)(n+2)(n+3)}$-ből

$$\frac{y(n+1)(n+2)(n+3)}{6} - 1 = n - x \tag{2}$$

adódik.

(1) és (2) összevetésével az

$$\frac{yn(n+1)(n+2)}{6} = \frac{y(n+1)(n+2)(n+3)}{6} - 1$$

egyenletet kapjuk. Ezt átalakítva

$$\frac{y(n+1)(n+2)(n+3) - yn(n+1)(n+2)}{6} = 1,$$

$$\frac{3y(n+1)(n+2)}{6} = 1,$$

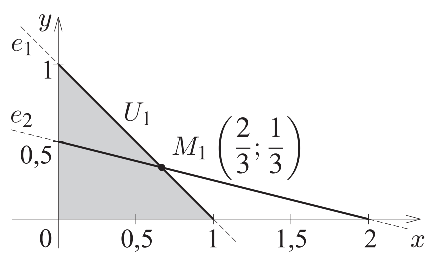
$$y = \frac{2}{(n+1)(n+2)}$$

adódik. 1 pont

Visszahelyettesítve (1)-be $x = \dfrac{2n}{3}$ adódik, vagyis e_n, és e_{n+1} egyenes metszéspontja:

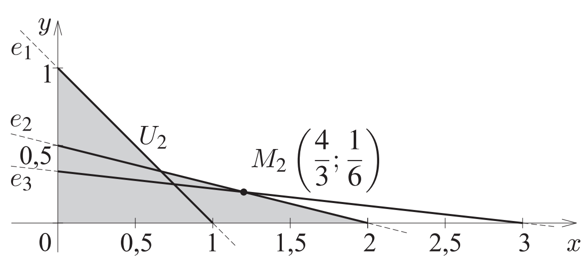
$$M_n\left(\frac{2n}{3}; \frac{2}{(n+1)(n+2)}\right).$$

Vizsgáljuk meg az első pár esetben $U_1, U_2, U_3, \ldots$-t!



Amint a fenti ábrán látjuk $T(U_1) = \dfrac{1}{2}$, míg $T(U_1)$-ből $T(U_2)$-t úgy kapjuk, hogy egy kis tompaszögű (az ábrán a fehér) háromszög területével növeljük $T(U_1)$-et. Ennek a tompaszögű háromszögnek a vízszintes oldala egységnyi hosszú (mivel két szomszédos indexű egyenes zérushelyének távolsága: 1), míg az oldalhoz tartozó magassága a fentiek szerint (e_1, és e_2 egyenes metszéspontjának y koordinátája) $m = \dfrac{2}{(1+1)(1+2)} = \dfrac{1}{3}$. Vagyis

$$T(U_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3}.$$



A második ábra alapján $T(U_2)$-ből $T(U_3)$-t úgy kapjuk, hogy egy újabb kis tompaszögű (az ábrán a fehér) háromszög területével növeljük $T(U_2)$-t. Ennek a tompaszögű háromszögnek a vízszintes oldala újra egységnyi hosszú, míg az oldalhoz tartozó magassága a fentiek

szerint (e_2, és e_3 egyenes metszéspontjának y koordinátája) $m = \dfrac{2}{(1+2)(1+3)} = \dfrac{2}{3 \cdot 4}$.
Vagyis

$$T(U_3) = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4}\,.$$

(*Megjegyzés:* Ha legalább $T(U_3) = \dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4}$-t jól kiszámolta:) 1 pont

Az első pár egyenes megrajzolása után úgy tűnik, hogy ha egy újabb, $n+1$-edik egyenest veszünk fel az eddigi n darab egyenesünkhöz, akkor az új egyenes „legutoljára” a legutolsó, azaz az n-edik egyenest metszi. (Vagyis az $n+1$-edik egyenes többivel vett metszéspontjai közül az n-edikkel vett esetén a legnagyobb x-koordinátájú a metszéspontja.)

A korábban, az e_n és e_{n+1} egyenes metszéspontjára kapott:

$$M_n\left(\frac{2n}{3}; \frac{2}{(n+1)(n+2)}\right)$$

összefüggés alapján az $M_1, M_2, \dots, M_n$ metszéspontok egyre „jobbra és lentebb” ($\dfrac{2n}{3}$ növekvő, $\dfrac{2}{(n+1)(n+2)}$ pedig csökkenő sorozat!) helyezkednek el.

Ez alapján

az M_1-től jobbra az e_2 egyenes az e_1 egyenes fölött van;

az M_2-től jobbra az e_3 egyenes az e_2 egyenes fölött van (és így az e_1 fölött is!);

az M_3-tól jobbra az e_4 egyenes az e_3 egyenes fölött van (és így az e_1, és az e_2 fölött is!) …

az M_{n-1}-től jobbra az e_n egyenes az $e_1, e_2, e_3, \dots, e_{n-1}$ egyenes fölött van.

Ha most felvesszük az e_{n+1} egyenest, akkor mivel M_n rajta van e_n egyenesen, de M_{n-1}-től jobbra, így az $e_1, e_2, e_3, \dots, e_{n-1}$ egyenesek fölött van. Mivel e_{n+1} meredeksége nagyobb, mint $e_1, e_2, e_3, \dots, e_{n-1}$ egyenesek bármelyikének meredeksége (e_{n+1} a „legkevésbé csökkenő”), ezért e_{n+1} az $e_1, e_2, e_3, \dots, e_{n-1}$ egyeneseket M_n-től balra (és fentebb) fogja metszeni.

Vagyis valóban igaz, hogy az e_{n+1} egyenes „legutoljára” a legutolsó, azaz az n-edik egyenest metszi a nála kisebb indexű egyenesek közül. 1 pont

(*Megjegyzés:* Ha a megoldás során bárhol utalt arra a megoldó, hogy az e_{n+1} egyenes legutoljára az e_n egyenest metszi a nála kisebb indexűek közül, akkor kapja meg ezt a részpontot, mivel eléggé nyilvánvaló ez az állítás!)

Innentől – a fenti két ábránál leírtakhoz hasonlóan – adódik, hogy $T(U_n)$-ből $T(U_{n+1})$-t úgy kapjuk, hogy olyan háromszög területével növeljük, melynek két csúcspontja az e_n, és e_{n+1} egyenesek x-tengellyel vett metszéspontja, a háromszög harmadik csúcspontja pedig e_n, és e_{n+1} metszéspontja. Ennek a háromszögnek a vízszintes oldala ezek szerint egységnyi, míg az ehhez az oldalhoz tartozó magasság $m = \dfrac{2}{(n+1)(n+2)}$.

Így a háromszög területe: $\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$.

Vagyis $T(U_{n+1}) = T(U_n) + \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$.

Innen
$$T(U_n) = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}\,. \qquad \text{1 pont}$$

A fenti összeg jól ismert módon átalakítható teleszkópikus összeggé.

$$T(U_n) = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{2-1}{1\cdot 2} + \frac{3-2}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{(n+1)-n}{n(n+1)}\,,$$
$$T(U_n) = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}\,. \qquad \text{1 pont}$$

Vagyis U_{2010} területe: $T(U_{2010}) = 1 - \dfrac{1}{2011} = \dfrac{2010}{2011}$. 1 pont

Összesen: 7 pont

Általánosítási lehetőség:

Legyen $\{a_n\}$ pozitív, csökkenő sorozat úgy, hogy $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ véges, $b_1 = \dfrac{1}{a_1}$, $b_2 = \dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2}$, $\ldots$, $b_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}$, és e_n a következő módon definiált egyenes:

$$e_n: \quad b_n y = n - x \quad \big(n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\big)!$$

Legyen H_n az e_n egyenes, az x-tengely és az y-tengely által meghatározott háromszög, és legyen U_n a $H_1, H_2, \ldots, H_n$ háromszögek egyesítésével kapott sokszög.

Ekkor $T(U_n) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i$.

Például, ha $a_n = \dfrac{2}{n^2}$, akkor

$$b_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} = \frac{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{12}\,.$$

Vagyis ha
$$e_n: \quad \frac{n(n+1)(2n+1)}{12}\, y = n - x, \quad \text{akkor} \quad T(U_n) \to \frac{\pi^2}{6}\,.$$