Bolyai János

Matematikai Társulat

Oktatási és Kulturális Minisztérium
Támogatáskezelő Igazgatósága
támogatásával

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2009/2010-es tanév
1. forduló
haladók III. kategória

Feladatok

1. Bizonyítsuk be, hogy egy pitagoraszi számhármasnak mindig van két olyan eleme, amelyek négyzetének különbsége osztható 7-tel.

(Pitagoraszi számhármason három olyan a, b, c természetes számot értünk, amelyekre teljesül az $a^2 + b^2 = c^2$ összefüggés.)

2. Melyek azok a pozitív egész számok, amelyek 2010-zel nagyobbak számjegyeik négyzetösszegénél?

3. Az a, b, x, y valós számokra teljesülnek a következő összefüggések: $ax + by = 3$, $ax^2 + by^2 = 7$, $ax^3 + by^3 = 16$ és $ax^4 + by^4 = 42$.

Határozzuk meg $ax^5 + by^5$ értékét!

4. $ABCD$ trapézban AB párhuzamos CD-vel. Jelölje E az AD egyenes és a BCD háromszög köré írt kör D-től különböző metszéspontját, F pedig az AD egyenes és a C-ből BE-hez húzott párhuzamos egyenes metszéspontját. (D az A és az E pont között van.)

Bizonyítsuk be, hogy a BC szakasz az AD és EF szakaszok mértani közepe!

5. Legyen e_n a következő módon definiált egyenes:

$$e_n: \quad y = \frac{6(n-x)}{n(n+1)(n+2)} \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Legyen H_n az e_n egyenes, az x-tengely és az y-tengely által meghatározott háromszög, és legyen U_n a $H_1, H_2, \ldots, H_n$ háromszögek egyesítésével kapott sokszög.

Mekkora az U_{2010} területe?