Bolyai János

Matematikai Társulat

Oktatási és Kulturális Minisztérium
Támogatáskezelő Igazgatósága
támogatásával

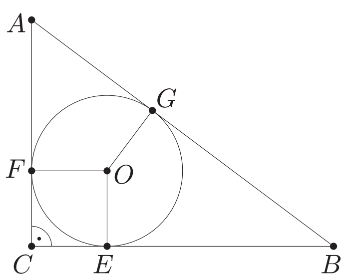
Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2009/2010-es tanév
2. forduló
haladók II. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Egy derékszögű háromszög oldalainak hossza és területének mérőszáma is egész szám. Bizonyítsuk be, hogy a beírt kör sugarának hossza is egész szám!

Megoldás. Először megmutatjuk, hogy a derékszögű háromszög beírt körének sugara $r = \dfrac{a+b-c}{2}$, ha c jelöli az átfogó, a és b pedig a befogók hosszát.

Az alábbi ábrán O jelöli a beírt kör sugarát, E, F és G az érintési pontokat. Az $OECF$ négyszög négyzet, hiszen van három derékszöge, továbbá $OE = OF = r$. Ezért FC és CE hossza is r.



A körhöz külső pontból húzott érintőszakaszok egyenlők, innen $AF = AG = b-r$ és $BE = BG = a-r$, ha a a BC, b pedig az AC oldal hossza. Végül $c = AB = AG + GB =$ $= (b-r) + (a-r) = a + b - 2r \Rightarrow r = \dfrac{a+b-c}{2}$. 2 pont

Most rátérünk annak bizonyítására, hogy r egész.

Ha a terület egész, akkor ab páros, tehát legalább az egyik befogó hossza páros szám. 1 pont

Első eset: Mindkét befogó hossza páros szám.

Ekkor Pitagorasz tétele miatt c is páros, hiszen $c^2 = a^2 + b^2$ páros, így c is az. Innen $a+b-c$ páros, így r egész. 2 pont

Második eset: Pontosan az egyik befogó hossza páros szám (legyen ez mondjuk a).

Ekkor $a+b$ páratlan és c (megint Pitagorasz tétele miatt) páratlan, tehát $a+b-c$ ismét páros, r egész. 2 pont

Összesen: 7 pont

2. Határozza meg a p paraméter értékét úgy, hogy az $x^2+2px-3p-2=0$ egyenlet x_1 és x_2 gyökeire $x_1^2+x_1^3=4-\left(x_2^2+x_2^3\right)$ teljesüljön.

Megoldás. Az egyenlet diszkriminánsa: $4p^2-4(-3p-2)=4p^2+12p+8$.

Az egyenletnek akkor van megoldása, ha a diszkrimináns nem negatív, ez akkor teljesül, ha $p\leqq -2$ vagy $p\geqq -1$. 1 pont*

Az egyenlet gyökeire megadott összefüggést átalakítva:

$$x_1^2+x_2^2+x_1^3+x_2^3=4. \tag{1}$$

A gyökök és együtthatók összefüggései alapján:

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=4p^2-2(-3p-2)=4p^2+6p+4,$$ 1 pont

$$x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)\left(x_1^2+x_2^2-x_1x_2\right)=(x_1+x_2)\left((x_1+x_2)^2-3x_1x_2\right)=$$

$$=-8p^3+6p(-3p-2)=-8p^3-18p^2-12p.$$ 2 pont

Ezek alapján az (1) összefüggés:

$$4p^2+6p+4-8p^3-18p^2-12p=4,$$

$$8p^3+14p^2+6p=0,$$

$$2p(4p+3)(p+1)=0.$$

A megoldások: $p=-1$; $p=-\dfrac{3}{4}$; $p=0$. 2 pont

Mindhárom megoldás megfelel a feltételeknek. 1 pont*

Összesen: 7 pont

A *-gal jelölt pontok akkor is járnak, ha a versenyző belátja, hogy a kapott p értékekre van az egyenletnek megoldása.

3. Az $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ, \ldots, 179^\circ$ nagyságú szögekből hányféle módon lehet kiválasztani hármat úgy, hogy a kiválasztott szögek egy különböző oldalú háromszög szögei lehessenek?

Megoldás. Mivel az oldalak különbözőek, a szögek is azok. Két különböző szög kiválasztása a háromszög szögösszege miatt már meghatározza a harmadikat. 1 pont

Legyenek a szögek növekvő sorrendben x, y és z.

Ekkor $x+y+z=180^\circ$ és $y<z$ miatt $x+y<180^\circ-y$, ezért $x/2+y<90^\circ$-nak kell teljesülnie. 1 pont

(Ha ez az egyenlőtlenség nem jelenik meg, de a szögek összeválogatásánál kiderül, hogy gondol rá, a pont akkor is jár.)

A lehetséges eseteket foglaljuk táblázatba:

x értéke	x-hez tartozó lehetséges y értékek	y lehetséges értékeinek száma
1	$2, 3, \ldots, 89$	88
2	$3, 4, \ldots, 88$	86
3	$4, 5, \ldots, 88$	85
4	$5, 6 \ldots, 87$	83
5	$6, 7, \ldots, 87$	82
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
57	$58, 59, 60, 61$	4
58	$59, 60$	2
59	60	1

Bármilyen formájú, tartalmilag jó összeválogatás: 1 pont

Az összes lehetséges esetet y lehetséges értékeinek összege adja meg. 1 pont

Így az esetek száma $88 + 86 + 85 + 83 + 82 + 80 + \ldots + 4 + 2 + 1$, 1 pont

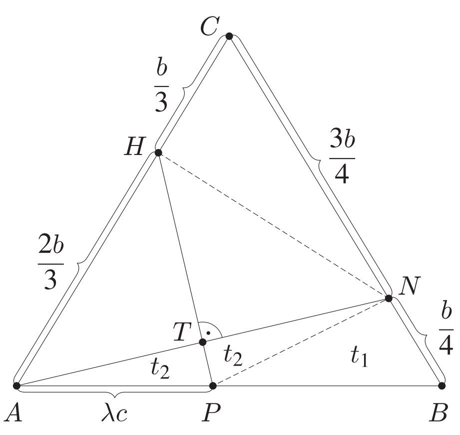
ami ugyanaz, mint

$$(88 + 85 + 82 + \ldots + 4 + 1) + (86 + 83 + 80 + \ldots + 5 + 2) =$$
$$= 30/2(88 + 1) + 29/2(86 + 2) = 2611.$$
2 pont

Összesen: 7 pont

4. Az ABC egyenlő szárú háromszög AB alapjának egyik belső pontja P. Az AC szár C-hez közelebbi harmadolópontja H. Az A csúcs HP egyenesre vonatkozó tükörképe a BC oldal B-hez közelebbi negyedelőpontja. Határozzuk meg az $AP : PB$ arány értékét!

Megoldás. Tekintsük a következő ábrát:



Az $AB = c$ jelöléssel legyen ábránknak megfelelően $AP = \lambda c$, ekkor $PB = (1 - \lambda)c$, ahol $0 < \lambda < 1$.

Így pedig $PB = (1 - \lambda)c$ alapján

$$\frac{AP}{PB} = \frac{\lambda}{1 - \lambda}.$$

Az ABC háromszög területét $t_{ABC} = t$-vel jelölve $t_{ANC} = \dfrac{3}{4}t$, mert két háromszög – ANC és ABN háromszög – BN és CN alapjához tartozó A csúcsból induló magassága közös.

Az ANH és a HNC háromszög közös N csúcsból induló magassága is azonos, ezért $t_{ANH} = \dfrac{t}{2}$ és $t_{HNC} = \dfrac{t}{4}$. 1 pont

Mivel pedig $t_{ATH} = t_{TNH}$, ezért értékük $\frac{t}{4}$.

Az ABN háromszög területe megoldásunk első bekezdése alapján $\frac{t}{4}$.

Az APN és PBN háromszögek N csúcsból induló magassága közös, ezért

$$\frac{2t_2}{t_1} = \frac{\lambda}{1-\lambda}, \quad \text{azaz} \quad t_1 = \frac{2(1-\lambda)}{\lambda}\,t_2,$$ 1 pont

hiszen a tükrözés miatt $t_{APT} = t_{PNT} = t_2$.

Az ABN háromszög $\frac{t}{4}$ területére így – ábránknak megfelelően – egyrészt

$$(*) \qquad 2t_2 + t_1 = \frac{t}{4}, \quad \text{másrészt} \quad t_1 = \frac{2(1-\lambda)}{\lambda}\,t_2$$

teljesül.

Vizsgáljuk most meg, hogy mekkora az APH háromszög területe!

Az AP oldalhoz tartozó magasság az ABC háromszög AB oldalához tartozó magasságának $\frac{2}{3}$-része, mert H harmadolópont. Így pedig $t_{APH} = \frac{2}{3}\lambda t$. 2 pont

$(*)$ alapján az adott egyenletrendszerből $t_2 = \frac{\lambda}{8}\,t$ és $t_1 = \frac{1-\lambda}{4}\,t$ adódik. 1 pont

Így pedig $t_{APH} = \frac{2}{3}\lambda t$ és $t_{APH} = t_2 + t_{ATH}$ alapján

$$t_{APH} = \frac{\lambda}{8}\,t + \frac{t}{4} = \frac{\lambda+2}{8}\,t.$$

Ha pedig $\frac{2}{3}\,\lambda t = \frac{\lambda+2}{8}\,t$, akkor $\lambda = \frac{6}{13}$. 1 pont

Ekkor pedig

$$\frac{AP}{PB} = \frac{\lambda}{1-\lambda} = \frac{6}{7}\,.$$ 1 pont

Összesen: 7 pont