**Bolyai János**

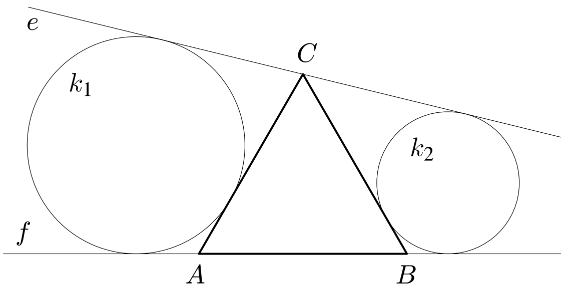
**Matematikai Társulat**

Oktatási és Kulturális Minisztérium
Támogatáskezelő Igazgatósága
támogatásával

# Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
# 2009/2010-es tanév
# 3. (döntő) forduló
# haladók I. kategória

### Feladatok

**1.** Az $ABC$ szabályos háromszög oldalának hossza 10 egység. Az $AB$ oldal egyenese $f$. A $C$ csúcson keresztül olyan $e$ egyenest húztunk, ami a háromszögön kívül halad. Ezután megrajzoltuk az ábrán látható módon a $k_1$ és $k_2$ köröket, amelyek érintik az $e$ és $f$ egyeneseket, továbbá a háromszög egy-egy oldalát kívülről.




Jelölje a körök sugarának hosszát $r_1$ és $r_2$. Bizonyítsuk be, hogy az $r_1 + r_2$ összeg értéke nem függ az $e$ egyenes helyzetétől, és határozzuk meg ezt az értéket!

**2.** Az $x$, $y$, $z$ valós számokra $x + y + z = 9$ és $x^2 + y^2 + z^2 = 33$ teljesül. Mely $(x; y; z)$ számhármas esetén lesz az $yz$ szorzat értéke minimális?

**3.** Az $\{1; 2; 3; \ldots ; 20\}$ halmazból úgy választunk ki maximális számú elemet, hogy a kiválasztott számok közül bármelyik kettőnek a szorzata más-más számjegyre végződjön.

Hányféle választás lehetséges?

**Az eredményhirdetést 2010. május 21-én (pénteken) 14.00 órai kezdettel tartjuk az MTA Rényi Alfréd MKI Nagytermében (Budapest, V. ker., Reáltanoda u. 13–15.).**