**Bolyai János**

**Matematikai Társulat**

Oktatási és Kulturális Minisztérium
Támogatáskezelő Igazgatósága
támogatásával

# Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
# 2009/2010-es tanév
# 2. forduló
# haladók I. kategória

### Megoldások és javítási útmutató

**1.** Hány olyan pozitív egész számokból álló $(x; y)$ számpár van, amelyre $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{2010}$ teljesül?

**Megoldás.** Egyenletünk alapján $y = \frac{2010x}{2010 - x}$, ahol $0 < x < 2010$.

Mivel
$$y = \frac{2010x}{2010 - x} = \frac{2010(x - 2010) + 2010^2}{2010 - x} = -2010 + \frac{2010^2}{2010 - x},$$
ezért $(2010 - x) \cdot (y + 2010) = 2010^2$, ahol $x < 2010$ és $y > 0$. 2 pont

$2010 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$, így $2010^2$-nek pontosan $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$ darab pozitív osztója van. 2 pont

De $2010 - x < y + 2010$, így a $(2010 - x) \cdot (y + 2010) = 2010^2$ alak alapján $2010 - x$ $2010^2$-nek 2010-nél kisebb pozitív osztója.

Mivel $x = y = 0$ nem lehet, így 80 darab megfelelő osztó felelhet meg a
$$(2010 - x) \cdot (y + 2010) = 2010^2$$
felbontásnak. 1 pont

Azonban $2010 - x < y + 2010$ alapján pontosan 40-féle lehet, hasonlóan $2010 - x$ értéke. 1 pont

Ez pedig azt jelenti, hogy 40 darab megoldása lehet csak az eredeti egyenletnek.

Mind a 40 darab megoldás elő is állítható, hiszen $2010 - x$ értéke $2010^2$ bármely 2010-nél kisebb osztója lehet. 1 pont

---

Összesen: 7 pont

**2.** Adott az $ABCD$ paralelogramma. Adjon eljárást a $BC$ oldal azon $X$ pontjának a megszerkesztésére, amin keresztül ha a $BD$ átlóval párhuzamos egyenest húzunk, az egyenes harmadolja a paralelogramma területét! (A szerkesztést nem kell elvégeznie!)

**Megoldás.** Messe a keresett egyenes a $BC$ oldalt az $X$, a $CD$ oldalt az $Y$ pontokban. A feltétel és a paralelogramma tulajdonságai alapján az $XCY$ háromszög hasonló a $BCD$ háromszöghöz, területe a $BCD$ háromszög $2/3$ része. 2 pont

A hasonló síkidomok területére vonatkozó tétel alapján a hasonlóság aránya $\sqrt{2}/\sqrt{3}$. Tehát azt az $X$ pontot kell megszerkeszteni a $BC$ oldalon, amelyre $CX/CB = \sqrt{2}/\sqrt{3}$. 2 pont

Több lehetőség van:

1. Megszerkesztjük azt a szabályos háromszöget, aminek $BC$ a magassága. Ennek a háromszögnek az oldala $2/\sqrt{3}$-szor $BC$. 1 pont

Az oldal felével egyenlőszárú derékszögű háromszöget szerkesztünk, ennek az átfogója $\sqrt{2}/\sqrt{3}\,BC$. 1 pont

Ezt a távolságot kell $C$-ből felmérni a $BC$ oldalra. 1 pont

2. A $BC$ oldalra mint átmérőre kört rajzolunk. Megszerkesztjük az oldal $B$-hez közelebbi harmadolópontját, jelöljük ezt $Z$-vel. (A szakasz harmadolása a párhuzamos szelők tétele alapján, ismert eljárással végezhető.) Ebben a pontban merőlegest állítunk $BC$-re, ennek a körrel vett metszéspontja $Q$. A befogótétel miatt $CQ^2 = CZ \cdot BC$, azaz $2/3\,BC^2$. 2 pont

Ezért $CQ = \sqrt{2}/\sqrt{3}\,BC$. Így a $CQ$ szakasz hosszát kell felmérni $C$-ből, ez adja $X$-et. 1 pont

Összesen: 7 pont

**3.** Adjunk meg olyan negyedfokú egész együtthatós egyenletet, ahol a főegyüttható 1 és az egyenlet egyik gyöke $\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

**1. megoldás.** Keressük a megoldást $x^4 + px^2 + q$ alakban, ahol $a$, és $b$, egész számok. 1 pont

A megoldóképletből az egyik lehetséges megoldás: $x^2 = \dfrac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2}$. 1 pont

Mivel $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2 = 5 + 2\sqrt{6} = \dfrac{10+\sqrt{96}}{2}$, a $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ akkor lesz megoldás, ha 2 pont

$p = -10$ és $p^2 - 4q = 96$, ebből $q = 1$. 1 pont

Tehát a keresett polinom: $x^4 - 10x^2 + 1$. 1 pont

Ennek valóban gyöke a $\sqrt{2}+\sqrt{3}$. 1 pont

Összesen: 7 pont

**2. megoldás.** Induljunk ki az $x = \sqrt{2}+\sqrt{3}$ egyenletből. 1 pont

Ezt négyzetre emelve: $x^2 = 5 + 2\sqrt{6}$. 1 pont

Átrendezve: $x^2 - 5 = 2\sqrt{6}$. 1 pont

Újabb négyzetre emeléssel az $x^4 - 10x^2 + 25 = 24$ egyenlethez jutunk, ahol $x^2 \geqq \sqrt{5}$. 2 pont

Tehát a keresett polinom: $x^4 - 10x^2 + 1$. 1 pont

Ennek valóban gyöke a $\sqrt{2}+\sqrt{3}$. 1 pont

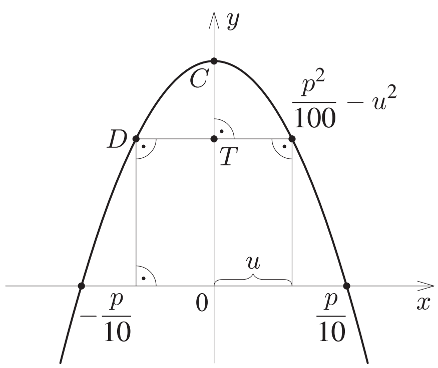
Összesen: 7 pont

**4.** Tudjuk, hogy az $f(x) = \frac{p^2}{100} - x^2$ függvény grafikonja és az $x$ tengely által meghatározott síkidomba olyan maximális kerületű téglalap írható, amelynek két csúcsa az $x$ tengelyen, kettő pedig $f(x)$ grafikonján van rajta.

$a)$ Milyen $p$ paraméter esetén létezik a feladatnak megfelelő téglalap?

$b)$ Bizonyítsuk be, hogy maximális kerületű téglalap létezése esetén van a téglalapnak olyan csúcsa, amelynek az $f(x)$ függvény görbéje által meghatározott parabola csúcsától mért távolsága független a $p$ paraméter értékétől!

**Megoldás.** Nyilvánvaló, hogy $p \neq 0$. Tekintsük most $p \neq 0$ esetén a feladat feltételeinek megfelelő ábrát.




$a)$ Ha létezik megfelelő téglalap, akkor

$$f(u) = \frac{p^2}{100} - u^2,$$

ahol – az ábra szerint – $0 < u < \frac{p}{10}$.

A téglalap kerülete $p > 0$ esetén (analóg módon $p < 0$ esetén)

$$4u + 2\left(\frac{p^2}{100} - u^2\right) = -2u^2 + 4u + \frac{p^2}{50}\,.$$ 1 pont

A téglalap $k$ kerülete csak $u$ függvénye, ezért

$$k(u) = -2(u-1)^2 + \frac{p^2}{50} + 2.$$ 1 pont

Mivel $k(u)$ lefelé nyíló parabola, maximuma $u = 1$-nél van, tehát akkor létezik maximális kerületű téglalap, ha $u = 1$ $\ -\frac{p}{10}$ és $\frac{p}{10}$ közé esik, vagyis $1 < \frac{|p|}{10}$. 1 pont

Ez pedig azt jelenti, hogy $|p|^2 > 100$, azaz $p < -10$ vagy $p > 10$. 1 pont

$b)$ Ábránk alapján maximum esetén (azaz $|p| > 10$) $f(u)$ $\ u = 1$ helyettesítéssel

$$f(1) = \frac{p^2}{100} - 1.$$

Az ábra szerint $CT$ szakasz hossza így $\frac{p^2}{100} - \left(\frac{p^2}{100} - 1\right) = 1.$ 1 pont

Maximális kerület esetén $DT = u = 1$, ezért $\overline{DC}^2 = \overline{DT}^2 + \overline{TC}^2$ alapján $\overline{DC}^2 = 1 + 1 = 2$, azaz $DC = \sqrt{2}$, ami valóban független a $p$ paraméter értékétől. 2 pont

Összesen: 7 pont