Bolyai János

Matematikai Társulat

Oktatási és Kulturális Minisztérium
Támogatáskezelő Igazgatósága
támogatásával

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2009/2010-es tanév
első (iskolai) forduló
haladók – I. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Milyen számjegyekből áll a $\underbrace{333\ldots33}_{2009\ \text{darab}}\cdot\underbrace{666\ldots66}_{2009\ \text{darab}}$ szorzat eredménye?

Megoldás. $\underbrace{333\ldots33}_{2009\ \text{darab}}=\dfrac{1}{3}\cdot\underbrace{999\ldots99}_{2009\ \text{darab}}=\dfrac{10^{2009}-1}{3}.$ 1 pont

Hasonlóan: $\underbrace{666\ldots66}_{2009\ \text{darab}}=\dfrac{2\cdot(10^{2009}-1)}{3}.$ 1 pont

A szorzat: $\dfrac{10^{2009}-1}{3}\cdot\dfrac{2\cdot10^{2009}-2}{3}=\dfrac{2\cdot10^{4018}-4\cdot10^{2009}+2}{9}.$ 1 pont

Elvégezve az összevonást a számlálóban:

$$\frac{2\cdot10^{4018}-4\cdot10^{2009}+2}{9}=\frac{2\overbrace{000\ldots00}^{4017\ \text{darab}}2-4\overbrace{000\ldots00}^{2009\ \text{darab}}}{9}=\frac{1\overbrace{999\ldots99}^{2008\ \text{darab}}6\overbrace{777\ldots77}^{2008\ \text{darab}}8}{9}.$$ 1 pont

Az osztás eredménye, mivel a maradék a hatosig, illetve az utolsó helyiértéken álló kettesig ismétlődik: 1 pont

$$\frac{1\overbrace{999\ldots99}^{2008\ \text{darab}}6\overbrace{777\ldots77}^{2008\ \text{darab}}8}{9}=\overbrace{222\ldots22}^{2008\ \text{darab}}1\overbrace{777\ldots77}^{2008\ \text{darab}}8.$$ 1 pont

Tehát a szorzat az 1, 2, 7, 8 számjegyeket tartalmazza. 1 pont

Összesen: 7 pont

2. Határozza meg azokat az abc háromjegyű számokat, amelyek egyenlőek az ab, ac, ba, bc, ca, cb számok összegével! (a, b, c számjegyek, mindegyik számot a tízes számrendszerben értjük.)

Megoldás. A feladatban szereplő számok helyi értékes alakját felírva a feltétel alapján a $22(a+b+c)=100a+10b+c$ egyenlőséghez jutunk. 1 pont

Átrendezve és 3-mal leosztva: $26a = 4b + 7c$. Ha b és c helyébe a lehető legnagyobb értéküket, 9-et írunk, a jobb oldalon álló kifejezés értéke akkor is csak 99, így $a \leqq 3$. 1 pont

Az egyenlőségből az is leolvasható, hogy c páros. 1 pont

Így $c = 2d$-t helyettesítve $13a = 2b + 7d$ egyenletet kapjuk.

Itt az $a = 1, 2, 3$ eseteket külön vizsgálva $a =$ 1-re $13 = 2b + 7d$ csak a $d = 1$, $b =$ 3-ra ad megoldást, azaz az egyik keresett szám a 132. 1 pont

Ha $a = 2$, akkor $26 = 2b + 7d$, innen d páros, így csak 2 lehet, ekkor a keresett szám 264. 1 pont

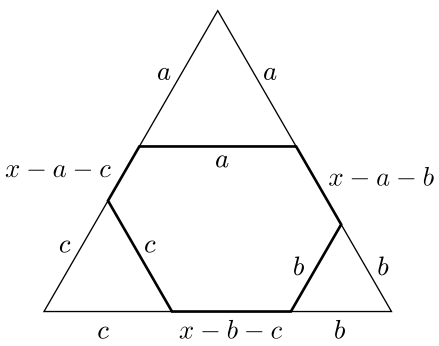
Ha $a = 3$, $39 = 2b + 7d$, d most csak páratlan lehet, 1 vagy 3, de az 1 esetén b nagyobb lenne 9-nél, tehát $d = 3$, a keresett szám a 396. 1 pont

Összefoglalva 3 számot találtunk, ezek: 132, 264, 396. Ezek eleget tesznek a feladat feltételének. 1 pont

Összesen: 7 pont

3. Egy hatszög minden szöge egyenlő. Bizonyítsuk be, hogy szemközti oldalai különbségének abszolút értéke megegyezik.

Megoldás. Mivel a hatszög szögei egyenlőek, a hatszög mindegyik belső szöge 120°-os. 1 pont



A külső szögek 60°-osak, így a hatszög 3 nem szomszédos oldalára (pl. az ábra szerint) 1-1 szabályos háromszög rajzolható, amik a hatszöggel együtt egy újabb szabályos háromszöget alkotnak, hiszen mindhárom szöge 60°. Legyenek a szabályos háromszögek oldalai a, b, c, illetve x. 3 pont

Így a hatszög további oldalai $x - a - c$, $x - a - b$, $x - b - c$. 2 pont

A hatszög 2 szemközti oldalának különbsége mindhárom esetben $x - a - b - c$, tehát a szemközti oldalak különbsége megegyezik. 1 pont

Összesen: 7 pont

4. Hány olyan f függvény van, amelyről tudjuk, hogy az értelmezési tartománya az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz, az értékkészlete a $\{2009, 2010\}$ halmaz, és az $f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(n)$ összeg páratlan?

Megoldás. Az értelmezési tartományból az $1, 2, \ldots, n - 1$ elemek bármelyikéhez két elemet rendelhetünk: a 2009 vagy 2010 közül bármelyiket. 1 pont

Ezeket egymástól függetlenül tehetjük meg. 1 pont

Így ezzel összesen 2^{n-1} lehetséges függvényt állítottunk elő. 1 pont

Az $f(n)$ értékét egyértelműen meghatározza az előző $n - 1$ elem összege. Ha az összeg páros, akkor $f(n) = 2009$, ha az összeg páratlan, akkor $f(n) = 2010$. 2 pont

Ha n páratlan, és az értelmezési tartomány minden eleméhez a 2009-et rendeltük hozzá, akkor az értékkészlet csak a $\{2009\}$ egyelemű halmaz lesz. Ez nem felel meg a feladatban megadott f függvénynek, így ebben az esetben $2^{n-1} - 1$ darab f függvény létezik, ahol az $f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(n)$ összeg páratlan. 1 pont

Hasonlóképpen, ha az n páros, és az értelmezési tartomány minden eleméhez a 2010-et rendeltük hozzá, akkor az értékkészlet csak a $\{2010\}$ egyelemű halmaz lesz. Ez sem felel meg a feladatban megadott f függvénynek, így ebben az esetben is $2^{n-1} - 1$ darab f függvény létezik, ahol az $f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(n)$ összeg páratlan. 1 pont

Összesen: 7 pont

5. Az $\{1; 2; 3; 4; \ldots ; 2009\}$ számhalmazból 10 darab számot választunk ki egyesével a következő módon:

Az első két szám az adott halmaz valamelyik két eleme. A harmadik kiválasztott szám az első kettő összege, ami éppen négyzetszám. Minden további választott szám az addig már kiválasztott számok összege.

Hány négyzetszám lehet a kiválasztott 10 darab szám között?

Megoldás. Legyen az első két választott szám x és y! A feltételek alapján így a harmadik szám $x+y$, a negyedik szám $x+y+(x+y) = 2(x+y)$, az ötödik szám $x+y+(x+y)+$ $+2(x+y) = 4(x+y)$. 1 pont

A további kiválasztott számok az előzőek alapján: a hatodik szám $8(x+y)$, a hetedik $16(x+y)$, a nyolcadik $32(x+y)$, a kilencedik $64(x+y)$, a tizedik pedig $128(x+y)$. 1 pont

Mivel $128(x+y) \leqq 2009$, ezért $x+y < 16$. 1 pont

A 16-nál kisebb megfelelő négyzetszámok 4 és 9, hiszen $3 \leqq x+y < 16$. 1 pont

Ha $x+y=4$, akkor a választott négyzetszámok az x, $4-x$, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512 számok közül kerülnek ki.

Mivel x értéke csak 1 vagy 3 lehet, ezért ezekben az esetekben 5 darab négyzetszámot kapunk. Ezek: 1, 4, 16, 64, 256. 1 pont

Az $x+y=9$ esetben az előző esethez hasonló módon a keresett négyzetszámok száma 5 vagy 4 aszerint, hogy x és y egyike négyzetszám-e, vagy egyik sem az. Így pedig 4 darab négyzetszám is lehet a megoldás a $2+7 = 3+6 = 6+3 = 7+2$ esetekben. 1 pont

Tehát a keresett négyzetszámok száma 4 vagy 5. 1 pont

Összesen: 7 pont