Bolyai János

Matematikai Társulat

Oktatási és Kulturális Minisztérium
Támogatáskezelő Igazgatósága
támogatásával

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2007/2008-as tanév
kezdők I–II. kategória II. forduló
kezdők III. kategória I. forduló

Megoldások és javítási útmutató

1. 23 diák írt meg egy dolgozatot, az átlag (két tizedes jegyre kerekítve) 2,74 lett. Lehet-e kevesebb, mint két elégtelen, ha tudjuk, hogy nyolc jeles volt? (6 pont)

1. megoldás. Írjuk fel a jegyek átlagát!

$$\frac{8\cdot 5+a\cdot 4+b\cdot 3+c\cdot 2+d\cdot 1}{23}\approx 2,74, \qquad \text{(1 pont)}$$

ahol az a, b, c és d természetes számok jelölik a jó, a közepes, az elégséges és az elégtelen osztályzatok számát. Ebből – felhasználva azt is, hogy a tört számlálója természetes szám – azt kapjuk, hogy:

$$(1) \qquad 4a+3b+2c+d=23.$$

Az osztály létszámából kapjuk, hogy:

$$a+b+c+d=15. \qquad \text{(1 pont)}$$

Ha $d=0$ vagy $d=1$, akkor ebből az következik, hogy:

$$a+b+c\geqq 14, \qquad \text{(2 pont)}$$

tehát – felhasználva (1)-et és azt, hogy a, b, c és d természetes számok – az alábbi ellentmondáshoz jutunk:

$$23=4a+3b+2c+d\geqq 2(a+b+c)+d\geqq 28.$$

Ezért nem lehet kettőnél kevesebb elégtelen osztályzat. (2 pont)

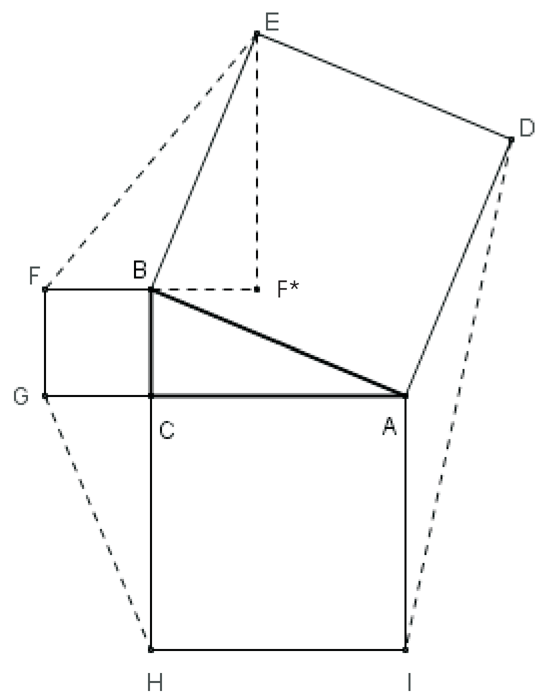
2. megoldás. Ha kettőnél kevesebb elégtelen lenne, akkor a legalacsonyabb átlag

$$\frac{1\cdot 1+14\cdot 2+8\cdot 5}{23}=3$$

lenne, ami ellentmondás. (6 pont)

2. Egy derékszögű háromszög átfogója 13 cm és a befogóinak összege 17 cm. A háromszög mindhárom oldalára kifelé négyzeteket rajzolunk. Így a háromszög csúcsain kívül hat pontot kapunk. Mekkora az ezek által meghatározott hatszög területe? (6 pont)

Megoldás.



Használjuk az ábra jelöléseit és legyen az F-nek a B-re vonatkozó tükörképe F^*! Ekkor $EBF^*\angle = ABC\angle$, mert azonos irányú $90°$-os elforgatás viszi át a szárakat egymásba. Ezért az ABC és a BF^*E derékszögű háromszögek egybevágóak, mert két oldalban és a közbezárt szögben megegyeznek.

$t_{FBE} = t_{BF^*E}$, mert az $FB = BF^*$ oldalakhoz ugyanaz az F^*E magasság tartozik.

Így

$$t_{FBE} = t_{ABC}. \qquad \text{(3 pont)}$$

Ugyanígy igazolható, hogy

$$t_{AID} = t_{ABC}. \qquad \text{(1 pont)}$$

Tehát – szokásos jelöléseket használva – a hatszög területe:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2} = (a+b)^2 + c^2 = 17^2 + 13^2 = 458 \text{ cm}^2. \qquad \text{(2 pont)}$$

3. Egy 8 fős társaság olyan kártyajátékot játszik, amelyet 4-en kell az óramutató járásával ellentétes irányba játszani. Mindig két négyes csoportban játszanak. Elhatározzák, hogy az összes lehetséges összetételben fognak játszani. (Két összetétel akkor különböző, ha a két 4-es csoport közül legalább az egyikben van olyan játékos, aki után másik játékos következik az egyik összetételben, mint a másikban.) Kb. hány év alatt tudják teljesíteni elhatározásukat, ha hetente egy összetételben játszanak? (8 pont)

Megoldás. Először alakítsuk ki a „csapatokat”! 8 ember közül 4-et $\binom{8}{4}$-féleképpen lehet kiválasztani, ekkor azonban minden csapat-összetételt kétszer számoltunk, mert ugyanazt a csapat-összetételt kapjuk, ha a másik 4 játékost választjuk ki. (3 pont)

Egy csapat $\dfrac{4!}{4} = 3!$-féleképpen ülhet le, mivel az elforgatással kapott leültetések a játék szempontjából ugyanazt adják. Így a különböző összetételek száma:

$$\frac{\binom{8}{4}}{2} \cdot 3! \cdot 3! = 1260. \qquad \text{(4 pont)}$$

$1260 : 52 \approx 24,23$. Tehát kb. 24 év alatt tudják teljesíteni az elhatározásukat. (1 pont)

4. Egy kékre befestett téglatest élei cm-ben mérve természetes számok és az egyik él hossza 7 cm. A téglatestet a lapjaival párhuzamos síkokkal 1 cm élű kis kockákra szétvágva a kék lappal nem rendelkező kis kockák száma feleakkora, mint az összes kis kockák száma. Mennyi az ilyen tulajdonságú téglatestek közül a legkisebb térfogatúnak a térfogata? (10 pont)

Megoldás. Legyen a téglatest másik két élének hossza a és b és tegyük fel, hogy $a \geqq b$. Nem lehet $b \leqq 2$, mert ekkor minden kis kockának lenne kék lapja. A feladat feltételei szerint:

$$5(a-2)(b-2) = \frac{7ab}{2}. \qquad \text{(2 pont)}$$

Ebből egyszerű átalakítással kapjuk, hogy:

$$(3a-20)(3b-20) = 280. \qquad \text{(3 pont)}$$

Ha $b = 3$, 4, 5, vagy 6, akkor nem kapunk megfelelő megoldást. Ha $b \geqq 7$, akkor $a \geqq b$ miatt $3b - 20$ a 280-nak 20-nál kisebb pozitív osztója, tehát 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, vagy 14. (3 pont)

Ebből a következő (a; b) számpárok felelnek meg: (100; 7), (30; 8), (20; 9) és (16; 10).

A térfogat értéke $7ab$ akkor a legkisebb, ha ab a legkisebb, tehát akkor, ha $a = 16$ és $b = 10$.

Ezért a legkisebb térfogat 1120 cm^3. (2 pont)

5. Az a, b, c és d valós számokra teljesül, hogy $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ és $ac + bd = 0$. Mennyi lehet az $ab + cd$ értéke? (10 pont)

1. megoldás.

$$(a^2+b^2)(ab+cd) = (a^2+b^2)ab + (a^2+b^2)cd = (c^2+d^2)ab + (a^2+b^2)cd =$$

$$= abc^2 + abd^2 + a^2cd + b^2cd = bc(ac+bd) + ad(ac+bd) = bc \cdot 0 + ad \cdot 0 = 0.$$

Így, ha $a^2 + b^2 \neq 0$, akkor $ab + cd = 0$.

Ha $a^2 + b^2 = 0$, akkor $a = b = c = d = 0$, tehát ekkor is $ab + cd = 0$. (10 pont)

2. megoldás. Ha $a^2 + b^2 = 0$, akkor $a = b = c = d = 0$ és ekkor $ab + cd = 0$. (1 pont)

A továbbiakban feltesszük, hogy $a^2 + b^2 \neq 0$.

$a^2 + b^2 = c^2 + d^2$, tehát $a^2 - c^2 = -b^2 + d^2$, amiből négyzetre emeléssel kapjuk, hogy:

$$a^4 - 2a^2c^2 + c^4 = b^4 - 2b^2d^2 + d^4. \quad \text{(2 pont)}$$

$ac + bd = 0$, tehát $a^2c^2 = b^2c^2$. Ezért $a^4 + c^4 = b^4 + d^4$, azaz $a^4 - b^4 = -c^4 + d^4$, vagyis

$$(a^2 + b^2)(a^2 - b^2) = (c^2 + d^2)(-c^2 + d^2). \quad \text{(2 pont)}$$

Mivel $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ és feltettük, hogy $a^2 + b^2 \neq 0$, ebből: $a^2 - b^2 = -c^2 + d^2$.

Így – ismét felhasználva, hogy $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ – azt kapjuk, hogy $a^2 = d^2$ és $b^2 = c^2$. (2 pont)

Ebből felhasználva, hogy $ac + bd = 0$ az következik, hogy $a = d$ és $b = -c$ vagy $a = -d$ és $b = c$. Mindkét esetben $ab + cd = 0$. (3 pont)

3. megoldás. Tekintsük az **$\underline{\mathbf{a}}$** $(a;\ b)$ és a **$\underline{\mathbf{b}}$** $(c;\ d)$ vektorokat!

Az $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ egyenlőség azt jelenti, hogy ezek ugyanolyan hosszúságú vektorok. (1 pont)

Az $ac + bd = 0$ egyenlőség pedig azt, hogy a skalárszorzatuk 0, tehát merőlegesek egymásra. (3 pont)

Ismeretes, hogy az $\underline{\mathbf{a}}$ $(a; b)$ 90°-os vektornak az óramutató járásával ellenkező irányú 90°-os elforgatottja $\underline{\mathbf{a}^*}$ $(-b; a)$ és az óramutató járásával egyező irányú 90°-os elforgatottja pedig $\underline{\mathbf{a}^{**}}$ $(b; -a)$. (4 pont)

Így $c = -b$ és $d = a$ vagy $c = b$ és $d = -a$. (1 pont)

Mindkét esetben $ab + cd = 0$. (1 pont)