Bolyai János

Matematikai Társulat

Oktatási és Kulturális Minisztérium
Támogatáskezelő Igazgatósága
támogatásával

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2007/2008-as tanév
2. (döntő) forduló
haladók III. kategória

Feladatok

1. A v_1 számnégyes az a_1, b_1, c_1, d_1 pozitív egész számokból áll, ahol $v_1 = (a_1; b_1; c_1; d_1)$, és a_1, b_1, c_1, d_1 egyike sem nagyobb 2008-nál. A v_2 rendezett számnégyes: $v_2 = (a_2; b_2; c_2; d_2)$, ahol $a_2 = |a_1 - b_1|$, $b_2 = |b_1 - c_1|$, $c_2 = |c_1 - d_1|$, $d_2 = |d_1 - a_1|$. Teljesen hasonló módon a v_{n+1} számnégyes képzési szabálya $v_{n+1} = (a_{n+1}; b_{n+1}; c_{n+1}; d_{n+1})$ esetén $a_{n+1} = |a_n - b_n|$, $b_{n+1} = |b_n - c_n|$, $c_{n+1} = |c_n - d_n|$, $d_{n+1} = |d_n - a_n|$. Bizonyítsuk be, hogy $v_{2008} = (0; 0; 0; 0)$!

2. Határozzuk meg az összes pozitív egészekből álló $(x; y)$ számpárt, ami kielégíti az alábbi egyenletet:

$$y^2(x-1) = x^5 - 1.$$

3. Az ABC szabályos háromszög AB oldalának a felezőpontjától különböző tetszőleges belső pontja P. Az APC háromszög beírt köre k_1, a BPC háromszög beírt köre k_2. A k_1 és k_2 körnek a PC egyenestől különböző közös belső érintője a Q pontban metszi az AB szakaszt. Bizonyítsuk be, hogy a Q pont helyzete független P megválasztásától!

Az eredményhirdetést 2008. május 30-án (pénteken) 13.00 órai kezdettel tartjuk az MTA Rényi Alfréd MKI Nagytermében (Budapest, V. ker., Reáltanoda u. 13–15.).