Bolyai János

Matematikai Társulat

Oktatási és Kulturális Minisztérium
Támogatáskezelő Igazgatósága
támogatásával

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2007/2008-as tanév
1. forduló
haladók III. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Egy sorozatot a következő módon adunk meg: $a_0 = 9$, és $a_{k+1} = 3a_k^4 + 4a_k^3$, ha $k \geqq 0$. Bizonyítsuk be, hogy a_{10} legalább 1000 darab kilences számjegyre végződik!

Megoldás. $a_1 = 3 \cdot 9^4 + 4 \cdot 9^3 = 3 \cdot 6561 + 4 \cdot 729 = 22\,599.$ 1 pont

Azt bizonyítjuk, hogy a_{k+1} legalább kétszer annyi kilencesre végződik, mint a_k. 2 pont

Ha a_k végén n darab kilences áll, akkor $a_k = a \cdot 10^n - 1$, valamilyen a egészre.

A sorozat képlete alapján:

$$\begin{aligned}
a_{k+1} &= 3 \cdot (a \cdot 10^n - 1)^4 + 4 \cdot (a \cdot 10^n - 1)^3 = \\
&= 3 \cdot (a^4 \cdot 10^{4n} - 4a^3 \cdot 10^{3n} + 6a^2 \cdot 10^{2n} - 4a \cdot 10^n + 1) + \\
&\quad + 4 \cdot (a^3 \cdot 10^{3n} - 3a^2 \cdot 10^{2n} + 3a \cdot 10^n - 1) = \\
&= 3a^4 \cdot 10^{4n} - 8a^3 \cdot 10^{3n} + 6a^2 \cdot 10^{2n} - 1 = b \cdot 10^{2n} - 1.
\end{aligned}$$

Mivel b egész, $b \cdot 10^{2n}$ legalább $2n$ darab nullára végződik, tehát ha egyet levonunk belőle, a kapott szám legalább $2n$ darab kilencesre végződik. 3 pont

Láttuk, hogy a sorozat minden eleme legalább kétszer annyi kilencesre végződik, mint az előző, tehát a_{10} legalább $2^{10} = 1024 > 1000$ darab kilencesre végződik. 1 pont

Összesen: 7 pont

2. Bizonyítsuk be, hogy az $1 + 2 + \ldots + n$ összeg semmilyen természetes szám esetén sem végződhet sem 12-re, sem 13-ra, sem 14-re!

1. megoldás. Legyen $S_n = 1 + 2 + \ldots + n$, és írjuk fel S_n-t az első 10 esetben:

$$\begin{array}{rcccccccccc}
n = & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10, \\
S_n = & 1, & 3, & 6, & 10, & 15, & 21, & 28, & 36, & 45, & 55.
\end{array}$$
1 pont

Mint látható, az egyes helyiértéken nem található 2, 4, 7, 9. Belátható, hogy ezek a számjegyek továbbra sem fordulnak elő az egyes helyiértéken, ugyanis ha S_n-ből S_{n+10}-et képzünk, akkor a végződések között a tízféle számjegy mindegyike pontosan egyszer lép fel.

Mivel a számjegyek összege 45, ezért S_{n+10} utolsó számjegye 5-tel nagyobb, vagy 5-tel kisebb S_n utolsó számjegyénél, viszont a hiányzó négy végződés éppen két olyan párba kapcsolható 2 és 7, illetve 4 és 9, amelyek csak egymásból adódhatnak, ha n-ről $n+10$-re áttérünk. Tehát S_n nem végződhet sem 12-re, sem 14-re. 2 pont

Látható, hogy a 3-as végződés viszont előfordul, és előbbi meggondolásunk alapján S_{17} is 3-ra végződik, hiszen S_7 8-ra végződött. Mivel $S_{17} = 153$, tehát nem 13-ra végződik.

Ha ezt a meggondolást kétszer alkalmazzuk, S_{n+20} végződése és S_n végződése azonos, hiszen a végződéshez $2 \cdot 45 = 90$-et adunk. Tehát csak $n = 20k + 2$ és $n = 20k + 17$ esetben lesz S_n utolsó számjegye 3. 2 pont

Az S_n-hez hozzáadott húsz szám összege: $(n+1) + (n+2) + \ldots + (n+20) = 20n + 210$.

$n = 20k + 2$ esetén ez $400k + 250$, $n = 20k + 17$ esetén pedig $400k + 550$.

Ebből látható, hogy mindkét esetben, amikor S_n 3-ra végződik, a 10-es helyiértéken 0 és 5 váltogatja egymást, tehát a kérdéses összeg csak 03-ra vagy 53-ra végződhet. 2 pont

---

Összesen: 7 pont

2. megoldás. Használjuk fel az $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ összefüggést! 1 pont

Ezt átalakítva az $1 + 8S_n = (2n+1)^2$ összefüggést kapjuk. 3 pont

Ha S_n rendre 12-re, 13-ra, 14-re végződne, akkor $1 + S_n$ 97-re, 05-re, 13-ra végződik, de egy négyzetszám nem végződhet egyikre sem, hiszen a 7 és a 3 nem négyzetszám, az 5-re végződő számok négyzete pedig 25-re végződik. 3 pont

---

Összesen: 7 pont

3. Legyen $A_n = \{1; 2; 3; \ldots; n\}$, ahol $n > 3$. Tekintsük az A_n halmaz olyan háromelemű részhalmazait, amelyek elemei egy háromszög oldalhosszai lehetnek. Az ilyen tulajdonságú háromelemű részhalmazok számát $f(n)$-nel jelöljük. Mekkora n értéke, ha

$$f(n+1) - f(n) = 100?$$

Megoldás. Az $f(n)$ függvényt rekurzív módon fogjuk megadni. Ha

$$f(n+1) = f(n) + g(n),$$

akkor $g(n)$ azon háromszögek száma, amelyekre igaz, hogy a háromszög legnagyobb oldala $n+1$.

$g(n)$ értékének meghatározásához az olyan $(x; y; n+1)$ számhármasok számát kell megadni, amelyekre $1 < x < y < n+1$ és $x + y > n+1$ teljesül, ahol $x, y \in \mathbb{N}$. 1 pont

(I.) Ha n páros, akkor

$x=2$-re $\quad$ y lehetséges értékei: n; $\quad$ 1-féle,

$x=3$-ra $\quad$ y lehetséges értékei: $n-1,\ n$; $\quad$ 2-féle,

$x=4$-re $\quad$ y lehetséges értékei: $n-2,\ n-1,\ n$; $\quad$ 3-féle,

$\vdots$

$x=\frac{n}{2}$-re $\quad$ y lehetséges értékei: $\frac{n}{2}+2,\ \ldots,\ n$; $\quad$ $\left(\frac{n}{2}-1\right)$-féle,

$x=\frac{n+2}{2}$-re $\quad$ y lehetséges értékei: $\frac{n}{2}+2,\ \ldots,\ n$; $\quad$ $\left(\frac{n}{2}-1\right)$-féle,

$\vdots$

$x=n-1$-re $\quad$ y lehetséges értékei: n; $\quad$ 1-féle. $\quad$ 1 pont

$g(n)$ tehát $2\cdot\left(1+2+3+\ldots+\frac{n}{2}-1\right)$ értékű, azaz $g(n)=\frac{n(n-2)}{4}$. $\quad$ 1 pont

(II.) Ha n páratlan, akkor az előző esethez teljesen hasonló módon a

$$g(n)=\left(1+2+3+\ldots+\frac{n-3}{2}\right)+\frac{n-1}{2}+\left(\frac{n-3}{2}+\frac{n-5}{2}+\ldots+1\right)$$

összefüggést kapjuk, ahonnan $g(n)=\frac{(n-1)^2}{4}$. $\quad$ 2 pont

A két esetben így $f(n+1)-f(n)=\frac{n(n-2)}{4}$, illetve $\frac{(n-1)^2}{4}$.

Feladatunk szerint $f(n+1)-f(n)=g(n)=100$.

Az $\frac{n(n-2)}{4}=100$ esetben nem kapunk megoldást. $\quad$ 1 pont

Ha pedig $\frac{(n-1)^2}{4}=100$, akkor n-re $n=21$ adódik. $\quad$ 1 pont

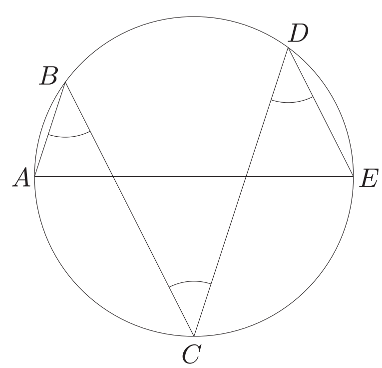
Összesen: 7 pont

4. Az A, B, C, D és E egy kör kerületének olyan pontjai, amelyekre igaz, hogy

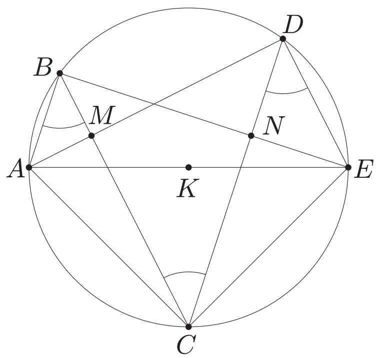
$$ABC\sphericalangle=CDE\sphericalangle=BCD\sphericalangle=45°.$$

Bizonyítsuk be, hogy

$$AB^2+CD^2=BC^2+DE^2.$$



1. megoldás.



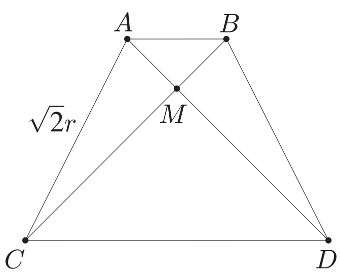
Jelöljük a kör középpontját K-val és legyen a kör sugara r. Húzzuk be az AD, BE, BD, EC és AC húrokat.

Legyen az AD és BC húrok metszéspontja M, a BE és CD húrok metszéspontja N.

Mivel $ABC\sphericalangle$ az AC ívhez tartozó kerületi szög, 45°, az ugyanezen az íven nyugvó AKC középponti szög 90°. Ugyanezért az EKC középponti szög is 90°-os, tehát az AE húr a kör átmérője ($2r$ hosszúságú). 2 pont

Mivel BCD és BED szögek egyaránt a BD íven nyugvó kerületi szögek, ezért egyenlők, tehát $BED\sphericalangle = 45°$, ezért DNE háromszög két szöge 45°-os, tehát END egyenlőszárú derékszögű háromszög.

Ugyanígy AMB, CMD és CNB is egyenlőszárú derékszögű háromszögek. 1 pont



Az $ABCD$, illetve a $DECB$ négyszögek húrtrapézok (AB és CD, illetve ED és CB oldalaik páronkénti párhuzamossága az adott váltószögpárok következménye), amelyek szárainak hossza $r\sqrt{2}$ az AKC, CKE és BKD derékszögű háromszögekből. 1 pont

Az AMC derékszögű háromszögben felírva a Pitagorasz-tételt (és felhasználva, hogy AMB és DMC egyenlőszárú derékszögű háromszögek):

$$AM^2 + MC^2 = AC^2,$$

(1) $$\left(\frac{AB}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{CD}{\sqrt{2}}\right)^2 = 2r^2.$$ 1 pont

Ugyanígy felírva Püthagorasz tételét a $DECB$ húrtrapéz DNB derékszögű háromszögére:

$$DN^2 + NB^2 = DB^2,$$

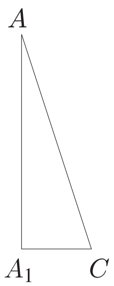
(2) $$\left(\frac{DE}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{BC}{\sqrt{2}}\right)^2 = 2r^2.$$ 1 pont

(1) és (2) összehasonlításából adódik az állítás. 1 pont

Összesen: 7 pont

1/a. megoldás. (A húrtrapézok felismerésével bezáróan azonos az előző megoldással. 4 pont)

Innen:



A trapézok magasságának behúzásával olyan derékszögű háromszögekhez jutunk, amelyeknek egyik befogója az alapok különbségének fele, másik befogója az alapok számtani közepe (Thalész tételét alkalmazva az AMB és CMD, illetve a DNE és BNC egyenlőszárú derékszögű háromszögekben), átfogójuk hossza pedig $r\sqrt{2}$.

$$AA_1 = \frac{AB+CD}{2}, \qquad A_1C = \frac{CD-AB}{2}\; AC = r\cdot\sqrt{2}.$$

E háromszögekre írjuk fel Püthagorasz tételét:

(1) $$\left(\frac{AB+CD}{2}\right)^2 + \left(\frac{CD-AB}{2}\right)^2 = 2r^2.$$ 1 pont

Hasonlóan a BDD_1 háromszögre is (ahol D_1 a trapéz magasságának talppontja):

(2) $$\left(\frac{DE+BC}{2}\right)^2 + \left(\frac{BC-DE}{2}\right)^2 = 2r^2.$$ 1 pont

(1) és (2) összehasonlításából adódik a bizonyítandó állítása. 1 pont

Összesen: 7 pont

2. megoldás. Húzzuk be az AB, BE, BD, EC és AC húrokat.

Mivel $ABC\sphericalangle$ az AC ívhez tartozó kerületi szög, 45°, az ugyanezen az íven nyugvó AKC középponti szög 90°. Ugyanezért az EKC és BKD középponti szögek is 90°-osak, tehát AE a kör átmérője. 2 pont

Az $ABCD$, illetve a $DECB$ négyszögek húrtrapézok (AB és CD, illetve ED és CB oldalaik páronkénti párhuzamossága az adott váltószögpárok következménye), amelyek szárainak hossza $r\sqrt{2}$ az AKC, EKC és BKD derékszögű háromszögekből. 1 pont

Alkalmazzuk Ptolemaiosz tételét az

(1) $ABEC$ húrnégyszögre: $2r\cdot BC = AB\cdot r\sqrt{2} + BE\cdot r\sqrt{2}$,

(2) $ADEC$ húrnégyszögre: $2r\cdot CD = DE\cdot r\sqrt{2} + AD\cdot r\sqrt{2}$,

(3) $ABDC$ húrnégyszögre: $AD\cdot BC = AB\cdot CD + 2r^2$,

(4) $BDEC$ húrnégyszögre: $CD\cdot BE = DE\cdot BC + 2r^2$. 2 pont

Használjuk fel, hogy a húrtrapézok átlói egyenlő hosszúak, valamint végezzük el a lehetséges egyszerűsítéseket.

Vonjuk ki egymásból a (3) és (4) egyenleteket:

(5) $$BC^2 - AB\cdot CD = CD^2 - DE\cdot BC.$$ 1 pont

Fejezzük ki (1)-ből BC-t, (2)-ből CD-t, majd a kapott egyenlőségeket négyzetre emelve és behelyettesítve (5)-be, a bizonyítandó egyenlőséghez jutunk. 1 pont

---

Összesen: 7 pont

5. Bergengóciában új számrendszert vezetnek be. A pozitív egészeket

$$n = \overline{a_k \ldots a_1 a_0} = a_k \cdot 2^k + \ldots + a_1 \cdot 2 + a_0$$

alakban írják fel, ahol $a_i \in \{0, 1, 2\}$.

Ebben a rendszerben egy szám többféle módon is felírható. Például:

$$18 = \overline{2010} = 2 \cdot 8 + 1 \cdot 2 = \overline{10010} = 1 \cdot 16 + 1 \cdot 2.$$

Hányféle különböző felírása van a 2008-nak ebben az új számrendszerben?

Megoldás. Érdemes először kis számokra megkeresni a lehetséges felírásokat.

$1 = \overline{1}$, $2 = \overline{2} = \overline{10}$, $3 = \overline{11}$, $4 = \overline{20} = \overline{12} = \overline{100}$, $5 = \overline{21} = \overline{101}$, $6 = \overline{102} = \overline{110} = \overline{22}$.

Ha az n pozitív egész lehetséges felírásainak a számát $f(n)$ jelöli, akkor az előbbiek alapján:

$$f(1) = 1, \quad f(2) = 2, \quad f(3) = 1, \quad f(4) = 3, \quad f(5) = 2, \quad f(6) = 3.$$

A következő sejtéseket fogalmazhatjuk meg $n > 1$ esetén: 2 pont

$$f(2n + 1) = f(n),$$
$$f(2n) = f(n) + f(n - 1).$$

A sejtések bizonyítása: Jelölje a vizsgált pozitív egész számot a, és tegyük fel, hogy $a \geqq 3$. (A következőkben – az egyszerűség kedvéért – megengedjük, hogy a szám elején néhány 0 álljon, így egységesen $(k + 1)$-jegyű számokat vizsgálhatunk.)

Ha $a = 2n + 1$, vagyis a páratlan, akkor a Bergengóc felírásában biztosan 1 az utolsó számjegy. Tehát $a = \overline{a_k \ldots a_1 1}$, vagyis $a - 1 = \overline{a_k \ldots a_1 0}$, itt az első k jegyet $f(n)$-féle módon adhatjuk meg, hiszen $\overline{a_k \ldots a_1} = \dfrac{a-1}{2} = n$. Tehát valóban, $f(2n + 1) = f(n)$. 1 pont

Ha $a = 2n$, vagyis a páratlan, akkor az új számrendszerben 0 vagy 2 az utolsó jegye. Az első esetben $a = \overline{a_k \ldots a_1 0}$, és mivel $n = \dfrac{a}{2} = \overline{a_k \ldots a_1}$, ezért az első k jegy $f(n)$-féle módon adható meg. A második esetben $a = \overline{a_k \ldots a_1 2}$, vagyis $a - 2 = \overline{a_k \ldots a_1 0}$, így

$$n - 1 = \frac{a - 2}{2} = \overline{a_k \ldots a_1},$$

amire $f(n - 1)$-féle felírás lehetséges. Tehát $f(2n) = f(n) + f(n - 1)$. 1 pont

Befejezés: Az $f(1) = 1$ és $f(2) = 2$ kezdőértékek és a rekurzió segítségével $f(2008)$ kis számolással meghatározható.

$$f(2008) = f(1004) + f(1003) = f(502) + f(501) + f(501) = f(502) + 2f(501).$$

Hasonló módon folytatva:

$$\begin{aligned} f(2008) &= f(251) + 3f(250) = 4f(125) + 3f(124) = 7f(62) + 3f(61) = \\ &= 7f(31) + 10f(30), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(2008) &= 7f(31) + 10f(30) = 17f(15) + 10f(14) = 27f(7) + 10f(6) = \\ &= 37f(3) + 10f(2) = 37 + 20 = 57. \end{aligned}$$

$f(2008) = 57$, ennyi különböző felírása van a 2008-nak az új rendszerben. 3 pont

Összesen: 7 pont