Bolyai János

Matematikai Társulat

Oktatási és Kulturális Minisztérium
Támogatáskezelő Igazgatósága
támogatásával

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2007/2008-as tanév
1. forduló
haladók III. kategória

Feladatok

1. Egy sorozatot a következő módon adunk meg: $a_0 = 9$, és $a_{k+1} = 3a_k^4 + 4a_k^3$, ha $k \geqq 0$. Bizonyítsuk be, hogy a_{10} legalább 1000 darab kilences számjegyre végződik!

2. Bizonyítsuk be, hogy az $1 + 2 + \ldots + n$ összeg semmilyen természetes szám esetén sem végződhet sem 12-re, sem 13-ra, sem 14-re!

3. Legyen $A_n = \{1; 2; 3; \ldots; n\}$, ahol $n > 3$. Tekintsük az A_n halmaz olyan háromelemű részhalmazait, amelyek elemei egy háromszög oldalhosszai lehetnek. Az ilyen tulajdonságú háromelemű részhalmazok számát $f(n)$-nel jelöljük. Mekkora n értéke, ha

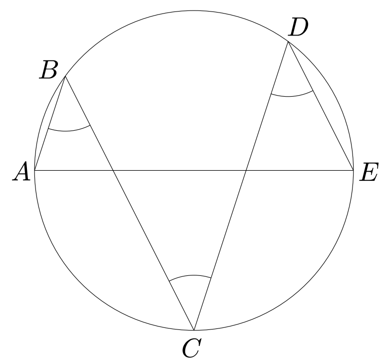
$$f(n+1) - f(n) = 100?$$

4. Az A, B, C, D és E egy kör kerületének olyan pontjai, amelyekre igaz, hogy

$$ABC\sphericalangle = CDE\sphericalangle = BCD\sphericalangle = 45^\circ.$$

Bizonyítsuk be, hogy

$$AB^2 + CD^2 = BC^2 + DE^2.$$



5. Bergengóciában új számrendszert vezetnek be. A pozitív egészeket

$$n = \overline{a_k \ldots a_1 a_0} = a_k \cdot 2^k + \ldots + a_1 \cdot 2 + a_0$$

alakban írják fel, ahol $a_i \in \{0, 1, 2\}$.

Ebben a rendszerben egy szám többféle módon is felírható. Például:

$$18 = \overline{2010} = 2 \cdot 8 + 1 \cdot 2 = \overline{10010} = 1 \cdot 16 + 1 \cdot 2.$$

Hányféle különböző felírása van a 2008-nak ebben az új számrendszerben?