Bolyai János

Matematikai Társulat

Oktatási és Kulturális Minisztérium
Támogatáskezelő Igazgatósága
támogatásával

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2007/2008-as tanév
első (iskolai) forduló
haladók – II. kategória
(nem speciális matematika tantervű gimnáziumi tanulók)

Megoldások és javítási útmutató

1. Bizonyítsuk be, hogy $n! + 2007$ egyetlen n pozitív egész szám esetén sem prímszám, sem pedig négyzetszám. ($n!$ az $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ szorzatot jelenti.)

Megoldás. Először azt látjuk be, hogy $n! + 2007$ nem prímszám.

$n = 1$ esetén $1! + 2007 = 2008$ nem prímszám, mert 2-nél nagyobb páros szám.

$n = 2$ esetén $2! + 2007 = 2009 = 7 \cdot 287$, így nem prímszám. 1 pont

Ha $n \geqq 3$, akkor $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ osztható 3-mal, és 2007 is osztható 3-mal, ezért az $n! + 2007$ összeg is. Mivel $3 \mid (n! + 2007)$ és $n! + 2007 > 1$, ezért $n! + 2007$ ebben az esetben sem prímszám. 2 pont

Most belátjuk, hogy $n! + 2007$ soha nem négyzetszám.

$n = 1, 2, 3, 4$ esetén $n! + 2007$ értéke rendre: 2008, 2009, 2013, 2031. A számok egyike sem négyzetszám, mert $44^2 = 1936$, $45^2 = 2025$ és $46^2 = 2116$. 1 pont

Ha pedig $n \geqq 5$, akkor $n! + 2007 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot n + 2007$, ahol $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot n$ osztható 2-vel és 5-tel is, így pedig 10-zel is, azaz $n!$ utolsó számjegye 0. 2 pont

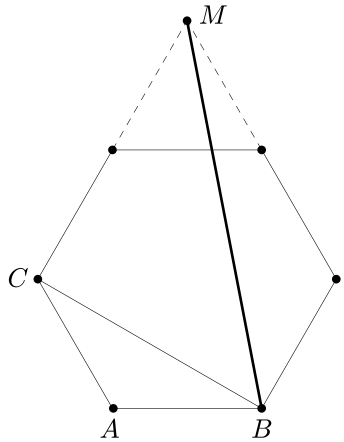
Így $n! + 2007$ utolsó számjegye 7. Egy négyzetszám viszont nem végződhet 7-es számjegyre, ezért $n! + 2007$ soha nem négyzetszám. 1 pont

---

Összesen: 7 pont

2. Adott a síkon egy egységnyi oldalú szabályos hatszög. Szerkesszünk csak vonalzó felhasználásával $\sqrt{7}$ hosszúságú szakaszt!

Megoldás. Az ábra jelöléseit használjuk:



A hatszög két másodszomszédos oldalát meghosszabbítva kapjuk az M metszéspontot. Bebizonyítjuk, hogy $MB = \sqrt{7}$. 3 pont

Az ABC egyenlőszárú háromszögben $ACB\sphericalangle = 30°$, a hatszög belső szögei pedig 120 fokosak, ezért a BCM háromszög C-nél derékszögű. 1 pont

A meghosszabbításnál a szaggatott vonalak szabályos háromszöget zárnak közre, ezért $CM = 2$. 1 pont

A hatszög rövidebb átlója az egységoldalú szabályos háromszög magasságának duplája, ezért $BC = \sqrt{3}$. 1 pont

Pitagorasz tétele alapján

$$BM = \sqrt{CM^2 + CB^2} = \sqrt{4+3} = \sqrt{7}.$$ 1 pont

Összesen: 7 pont

3. A minden valós számra értelmezett másodfokú $f(x)$ függvényre $f(x+2)+3f(-x) = 2x^2$ teljesül.

Határozzuk meg az $f(x)$ függvény értékkészletét!

Megoldás. Az $f(x)$ függvényt $f(x) = ax^2 + bx + c$ alakban kereshetjük.

Az adott egyenlet alapján $f(x+2) = a(x+2)^2 + b(x+2) + c$ és $f(-x) = ax^2 - bx + c$ felhasználásával 1 pont
$a(x^2 + 4x + 4) + bx + 2b + c + 3ax^2 - 3bx + 3c = 2x^2$ adódik.

Rendezéssel a $(4a-2)x^2 + (4a-2b)x + 4a + 2b + 4c = 0$ egyenletet kapjuk. 1 pont

Minden valós x-re csak úgy teljesülhet a kapott egyenlet, ha $4a - 2 = 0$, $4a - 2b = 0$ és $4a + 2b + 4c = 0$, 2 pont

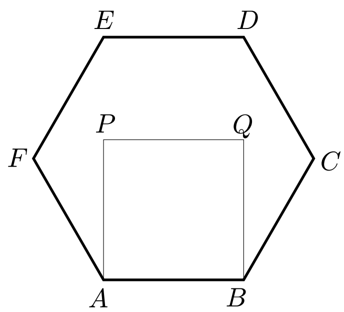
ahonnan $a = \frac{1}{2}$, $b = 1$, $c = -1$.

Tehát $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 1$. 1 pont

Ennek alapján $\frac{1}{2}x^2 + x - 1 = \frac{1}{2}(x+1)^2 - \frac{3}{2}$, 1 pont

ami azt jelenti, hogy $f(x)$ értékkészlete a $\left[-\frac{3}{2}; +\infty\right[$ intervallum (a $-\frac{3}{2}$-nél nem kisebb valós számok). 1 pont

Összesen: 7 pont

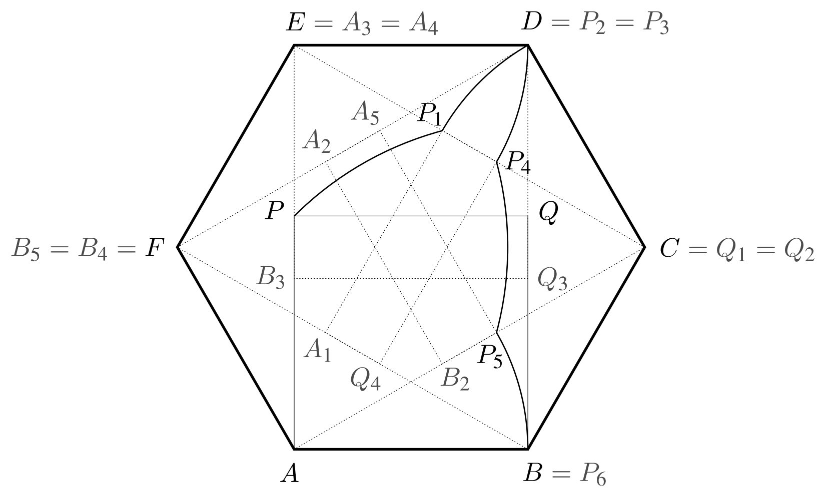


4. Az ábrán látható módon helyezzük el az $ABCDEF$ szabályos egységoldalú hatszögben a $PQBA$ egységoldalú négyzetet. Gördítsük körbe a hatszög belső felületén a négyzetet a következő módon: először az óramutató járásával megegyezően forgassuk a négyzetet a B körül mindaddig, amíg a négyzet Q csúcsa a hatszög C csúcsához ér. Ezután C körül forgassuk az óramutató járásával megegyezően a négyzetet, míg P egybeesik D-vel. Majd D körül forgassuk az óramutató járásával megegyezően a négyzetet, amíg a négyzet csúcsa a hatszög E csúcsához ér.

Folytassuk tovább ezt az eljárást mindaddig, amíg a négyzet a hatodik forgatás után vissza nem ér az AB oldalhoz.

Milyen hosszú utat jár be ezalatt P?

Megoldás. A hat forgatást és a P pont által bejárt körívet mutatja az alábbi ábra:

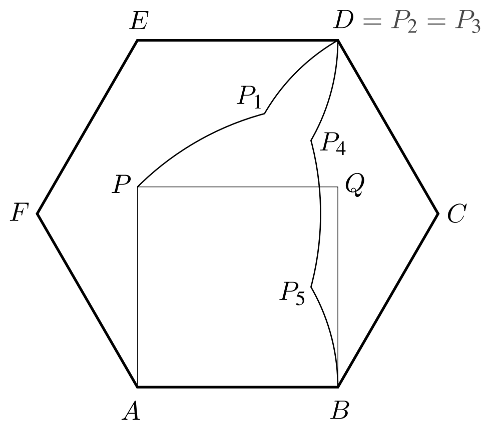


A szabályos hatszög belső szöge 120°, azaz $\frac{\pi}{3}$. A négyzet belső szöge 90°, azaz $\frac{\pi}{2}$. Így mindig $120^\circ - 90^\circ = 30^\circ$-kal forgatunk, hogy a négyzet oldala érintse a hatszög oldalát.

Azaz minden egyes forgatás során a P pontot $\frac{\pi}{6}$ szöggel forgatjuk. 1 pont

A forgatás középpontja minden egyes forgatás alkalmával változik, de mindig egy $\frac{\pi}{6}$ szögű körívet ír le P.

A körív hosszát megkapjuk, ha a körív sugarát a forgatás szögével szorozzuk. 1 pont



A körív sugara három fajta lehet:

Amikor a forgás középpontja és a P pont a négyzetben szemközti csúcs, akkor a forgatás sugara a négyzet átlója: $\sqrt{2}$. Ekkor P $\frac{\pi\sqrt{2}}{6}$ hosszú körívet fut be. 1 pont

Ha a forgatás középpontja P-vel szomszédos csúcs, akkor a körív sugara 1. Ekkor P $\frac{\pi}{6}$ hosszú körívet fut be. 1 pont

Amikor a P körül forgatunk, akkor a sugár 0, hiszen P helyben marad. 1 pont

A körívek hossza az egyes forgatások során:

Forgatás	Körív sugara	Körív hossza
$P \to P_1$	$\sqrt{2}$	$\frac{\pi\sqrt{2}}{6}$
$P_1 \to P_2$	1	$\frac{\pi}{6}$
$P_2 \to P_3$	0	0
$P_3 \to P_4$	1	$\frac{\pi}{6}$
$P_4 \to P_5$	$\sqrt{2}$	$\frac{\pi\sqrt{2}}{6}$
$P_5 \to P$	1	$\frac{\pi}{6}$

1 pont

A P által bejárt út a körívek hosszának összege:

$$\frac{3\pi}{6} + \frac{2\pi\sqrt{2}}{6} = \underline{\underline{\frac{\pi}{6}\left(3 + 2\sqrt{2}\right)}} \approx 3{,}0517$$ 1 pont

Összesen: 7 pont

5. Bizonyítsuk be, hogy egy kocka a lapjaival párhuzamos síkdarabokkal feldarabolható 2007 darab nem feltétlenül egybevágó kisebb méretű kockára.

Megoldás. Bármely kocka feldarabolható köbszám számú egybevágó kisebb kockára az egyes lapok n^2 egybevágó négyzetre történő bontása alapján.

Természetesen így 8, illetve 27 darab kockára feldarabolható egy adott kocka. 1 pont

Észrevehetjük, hogy ha a feldarabolásban előforduló bármely kockát 8 egybevágó kockára bontjuk, akkor $8 - 1 = 7$ újabb kockával növekedett az addig kapott kockák száma. 1 pont

Ha pedig a darabolás egy kockáját 27 újabb kockára vágjuk szét, akkor $27 - 1 = 26$ újabb kocka keletkezik. 1 pont

A 2007 szám előállítható $2007 = \mathbf{27} + 4 \cdot \mathbf{26} + 268 \cdot \mathbf{7}$ alakban. 2 pont

2007 darab kockára a $27 + 4 \cdot 26 + 268 \cdot 7$ előállítás alapján így a következő módon darabolhatunk:

Először a kockát 27 egybevágó részre vágjuk, utána a kapott kockák közül egyet újból 27 részre darabolunk, majd ezt az eljárást még megismételjük háromszor. Ekkor összesen 131 kockánk van. Ezután a kapott kockák egyikét 8 darab részre vágjuk, és bármely kapott kockát újra 8 kisebb kockára bontunk még 267-szer. 2 pont

Összesen: 7 pont