Bolyai János

Matematikai Társulat

Oktatási és Kulturális Minisztérium
Támogatáskezelő Igazgatósága
támogatásával

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2007/2008-as tanév
3. (döntő) forduló
haladók I. kategória

Feladatok

1. 2008 darab pozitív egész szám szorzata egyenlő az összegükkel. Közülük a legkisebb k-szor fordul elő az előállításban. Igazoljuk, hogy $1996 < k \leqq 2006$.

2. Egy konvex négyszög középvonalai a szemben levő oldalak felezőpontjait összekötő szakaszok. Az $ABCD$ konvex négyszögről tudjuk, hogy területe megegyezik középvonalai hosszának szorzatával.

Bizonyítsuk be, hogy ekkor $AC = BD$, vagyis, hogy a négyszög átlói egyforma hosszúak!

Van-e a téglalapokon kívül más olyan négyszög, ami ilyen tulajdonságú, azaz olyan, hogy területe megegyezik középvonalai hosszának szorzatával?

3. Egy szabályos n-szög csúcsaihoz tetszőleges módon a „$-$” vagy a „$+$” előjelet rendeljük hozzá. Egy lépésben bármely három szomszédos csúcs előjelét megváltoztatjuk.

$a)$ Igazoljuk, hogy $n = 2008$ esetén bármely kezdőhelyzetből indulva elérhető, hogy mindegyik csúcs előjele „$+$” legyen.

$b)$ Bizonyítsuk be, hogy $n = 2007$ esetén van olyan kiindulási helyzet, amelyből az adott lépés többszöri alkalmazásával soha nem érhető el, hogy mindegyik csúcs előjele „$+$” legyen.

Az eredményhirdetést 2008. május 30-án (pénteken) 13.00 órai kezdettel tartjuk az MTA Rényi Alfréd MKI Nagytermében (Budapest, V. ker., Reáltanoda u. 13–15.).