Bolyai János

Matematikai Társulat

Oktatási és Kulturális Minisztérium
Támogatáskezelő Igazgatósága
támogatásával

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2007/2008-as tanév
2. forduló
haladók I. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Határozza meg az összes olyan x egész számot, amelyre az $x^2+19x+95$ kifejezés négyzetszámot ad!

Megoldás. A feltétel szerint $x^2+19x+95=y^2$, ahol $y \in \mathbb{Z}$. A másodfokú egyenletet y függvényében megoldva:

$$x_{1,2} = \frac{-19 \pm \sqrt{4y^2-19}}{2}.$$ 1 pont

Ahhoz, hogy x egész szám legyen, szükséges feltétel, hogy $4y^2-19$ is négyzetszám legyen, azaz $4y^2-19=z^2$ teljesüljön, $z \in \mathbb{Z}$. 1 pont

Átrendezve és szorzattá alakítva:

$$(2y-z)(2y+z) = 1 \cdot 19 \qquad \text{vagy}$$
$$(2y-z)(2y+z) = (-1)\cdot(-19)$$

kell, hogy teljesüljön. 1 pont

A $\left.\begin{aligned} 2y \pm z &= 19 \\ 2y \mp z &= 1 \end{aligned}\right\}$ egyenletrendszer megoldása: $\begin{aligned} y &= 5 \\ z &= \pm 9. \end{aligned}$ 1 pont

A $\left.\begin{aligned} 2y \pm z &= -1 \\ 2y \mp z &= -19 \end{aligned}\right\}$ egyenletrendszer megoldása: $\begin{aligned} y &= -5 \\ z &= \pm 9. \end{aligned}$ 1 pont

Mindkét esetben az $x^2+19x+95=25$ egyenletet kell megoldani, ennek megoldása:
$x_1=-5$ és $x_2=-14$. 1 pont

A feladat ellenőrzése: 1 pont

Összesen: 7 pont

2. Az $f(x)=ax^2+bx+c$ másodfokú függvényre $f(a)=b$, $f(b)=c$ és $f(c)=a$ teljesül. Mi lehet ekkor a^3+b^2+c értéke?

Megoldás. A feltételek alapján az

$$\left.\begin{aligned} a^3+\ ab+\ c&=b\\ ab^2+\ b^2+\ c&=c\\ ac^2+\ bc+\ c&=a \end{aligned}\right\}\qquad \begin{aligned}&(1)\\&(2)\\&(3)\end{aligned}$$

egyenletrendszer adódik. 1 pont

A második összefüggésből a $0=ab^2+b^2=(a+1)b^2$ egyenletet nyerjük, ahonnan a kapott szorzat 0 volta miatt vagy $a=-1$, vagy pedig $b=0$. 1 pont

Az $a=-1$ esetben (1)-be helyettesítve $c-1=2b$, azaz $b=\dfrac{c-1}{2}$.

A (3) egyenletből pedig $-c^2+bc+c=-1$ adódik.

Ebbe az egyenletbe $b=\dfrac{c-1}{2}$ helyettesítéssel c-re a

$$-c^2+\frac{c-1}{2}c+c=-1$$

másodfokú egyenletet kapjuk. 1 pont

Egyenletünk rendezett alakja: $c^2-c-2=0$, melynek gyökei -1 és 2, ahonnan $b=-1$, illetve $\dfrac{1}{2}$.

Ebben az esetben ekkor $f(x)=-x^2-x-1$, vagy $f(x)=-x^2+\dfrac{1}{2}x+2$. 1 pont

A $b=0$ esetben (1) alapján $c=-a^3$ adódik, így most $f(x)=ax^2+0\cdot x-a^3$ alakú. 1 pont

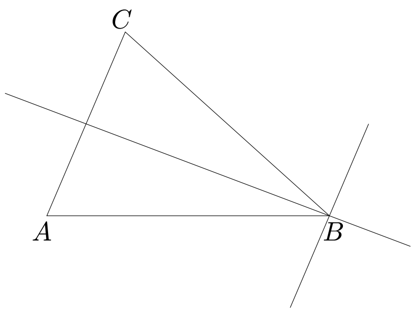
A három lehetséges esetben ($f(x)=-x^2-x-1$, $f(x)=-x^2+\dfrac{1}{2}x+2$, $f(x)=ax^2-a^3$) a^3+b^2+c értéke rendre

$$(-1)^3+(-1)^2+(-1)=-1,\qquad (-1)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^2+2=\frac{5}{4},\qquad a^3+0^2+(-a^3)=0.$$ 2 pont

Összesen: 7 pont

3. Keresse meg az ABC háromszög síkjában az összes olyan P pontot, amelyre az ABP, BCP és CAP háromszögek területe egyenlő!

Megoldás.



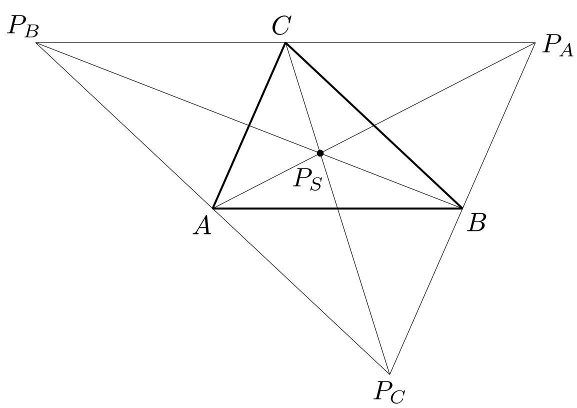
Az ABP és BCP háromszögeknek közös oldala a BP szakasz. 1 pont

Ahhoz, hogy ezek területe egyenlő legyen, szükséges és elégséges, hogy A és C pont egyenlő messze legyen BP egyenesétől. 1 pont

Ez lehet úgy, ha C és A különböző oldalán van BP egyenesének, ekkor BP egyenese nem más, mint a B-ből kiinduló súlyvonala a háromszögnek. 1 pont

Lehet úgy is, hogy C és A ugyanazon oldalán van a BP egyenesnek, ekkor BP párhuzamos AC-vel. 1 pont

Ahhoz tehát, hogy a megadott háromszögek közül kettő területe megegyezzen, P-nek a két egyenes valamelyikén kell lennie. Vagy a megfelelő csúcsból kiinduló súlyvonalon, vagy a csúcson át a szemközti oldallal párhuzamos egyenesen. 1 pont

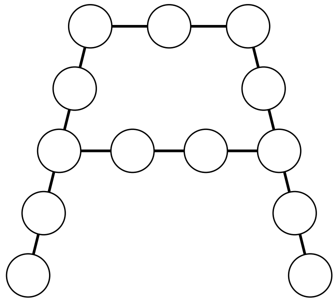


A feladat megoldásai tehát olyan pontok, amik mindhárom ilyen egyenespáron rajta vannak. 1 pont

Ilyen pont 4 van az ABC háromszög síkjában, a háromszög súlypontja, P_S, és az *ábrán* látható, a súlypontból az eredeti háromszög kétszeresre nagyított képének három csúcsa, P_A, P_B és P_C. 1 pont

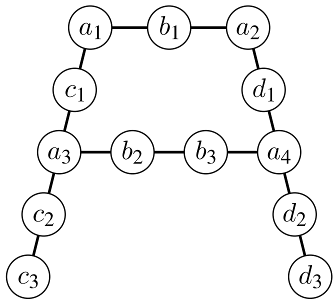
Összesen: 7 pont

Megjegyzés: Aki csak a súlypontot találja meg, és csak azt ellenőrzi, hogy ez jó, 2 pontot kaphat. Aki ezen felül igazolja, hogy a háromszögön belül más P nincs, további 2 pontot kaphat.



4. A 34 éves ADONISZ áruházlánc születésnapi ajándékként vásárláskor vevőinek minden 100 forintos tétel után egy olyan sorsjegyet ad, amelyen az áruház emblémája látható. Ha a vevő be tudja írni a körökbe a számokat 1-től 13-ig úgy, hogy minden szám pontosan egyszer szerepeljen, és a beírt számok összege minden egyenes vonal mentén 34 legyen, akkor a sorsjegy részt vesz a sorsoláson. Egy vevő több sorsjegyet is leadhat, de két sorsjegyet nem tölthet ki azonos módon. Legalább hány forintért vásárolt az a vevő, aki a legnagyobb esélyt akarja biztosítani magának, azaz az összes lehetséges módon kitöltötte a sorsjegyeket?

Megoldás.



Nevezzük a szárak metszéspontjaiban lévő számokat a_i számoknak, a vízszintes szárakon maradókat b_i számoknak, a bal, illetve jobb oldali száron maradókat c_i, illetve d_i számoknak.

A négy egyenes vonalon lévő számok összege az a_i számok összegével nagyobb az $1 + 2 + \ldots + 13$ összegnél, hiszen ezeket a számokat számoltuk kétszer. Így az a számok összege: $4 \cdot 34 - 91 = 45$.

Mivel a legnagyobb négy szám összege: $13 + 12 + 11 + 10 = 46$, így az a_i számok csak a 13, 12, 11, 9 lehetnek. Ekkor a b_i számok összege $2 \cdot 34 - 45 = 23$. 1 pont

A 13-asnak mindenképpen a felső sorban kell lennie, mert ellenkező esetben az összeg legfeljebb $12 + 11 + 10 = 33$ lehetne. A másik a szám ebben a sorban a 11 lehet csak, mert a másik kettő középre is a számot igényel. Ekkor a középső (b_1) szám a 10. Legyen például a 13-as a bal felső sarokban, és ekkor az így kapott lehetőségek kétszerese adja az összes lehetőséget. 1 pont

A középső sorban lévő b_2, b_3 számok összege: $34 - 12 - 9 = 13$, ekkor a b_2, b_3 számok 8 és 5, vagy 7 és 6 lehetnek. Ekkor a középső sorra négy olyan lehetőség adódik, ami a szárakon lévő c_i és d_i számokat befolyásolja. (Természetesen a végeredmény megadásánál figyelembe kell venni, hogy a két b szám kétféle sorrendben írható be az ábrába.) Ez a négy lehetőség:

(1) 12, 8, 5, 9; (2) 12, 7, 6, 9; (3) 9, 8, 5, 12; (4) 9, 7, 6, 12. 1 pont

Ezután már elég a bal oldali száron biztosítani, hogy a számok összege 34 legyen, hiszen ekkor a jobb oldali száron is ennyi az összeg. A c_i számként alkalmas számhármasok a sorrendtől eltekintve a következők:

$$\begin{aligned} &(1)\quad 34 - (13 + 12) = 9 = 6 + 2 + 1 \qquad &&(2)\quad 9 = 5 + 3 + 1 \\ & = 4 + 3 + 2 && = 4 + 3 + 2 \end{aligned}$$

2 pont

$$\begin{aligned} &(3)\quad 34 - (13 + 9) = 12 = 7 + 4 + 1 \qquad &&(4)\quad 12 = 8 + 3 + 1 \\ & = 7 + 3 + 2 && = 5 + 4 + 3 \\ & = 6 + 4 + 2 && \end{aligned}$$

Ha a bal szár 9 darab lehetséges megoldástípusából egyet kiválasztunk, az 6-féleképpen írható be a körökbe. A maradék d_i számok szintén 6-féleképpen írhatók be a maradék helyekre és vegyük figyelembe, hogy a középső sorban a b_2, b_3 számokra 2 lehetőség van, ez összesen: $6 \cdot 6 \cdot 2 = 72$ lehetőség. 1 pont

Vagyis összesen $2 \cdot 9 \cdot 72 = 1296$ kitöltés lehetséges, tehát a vásárlónak legalább 129 600 Ft-ért kellett vásárolnia. 1 pont

Összesen: 7 pont