Bolyai János

Matematikai Társulat

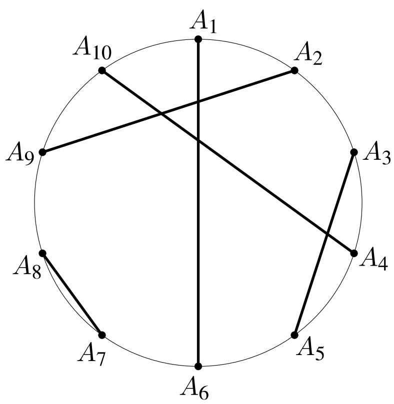
Oktatási és Kulturális Minisztérium
Támogatáskezelő Igazgatósága
támogatásával

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2007/2008-as tanév
első (iskolai) forduló
haladók – I. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Párba lehet-e állítani a szabályos tízszög csúcsait úgy, hogy a párba állított pontok által meghatározott öt távolság mind különböző?

Megoldás. Igen, lehet, pl. az ábra jelöléseivel egy jó párosítás:



$$A_1 - A_6,\ A_{10} - A_4,\ A_2 - A_9,\ A_3 - A_5,\ A_7 - A_8.$$ 4 pont

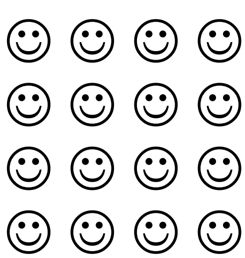
Az indoklás, hogy ezek tényleg különböző távolságok, a következő:

Forgassuk el az $A_{10}A_4$ szakaszt a kör középpontja körül, hogy A_{10} A_1-be kerüljön. Ekkor a tízszög szabályossága miatt A_4 A_5-be kerül. Hasonlóan az A_9A_2 szakasz forgatással az A_1A_4-be, az A_3A_5 az A_1A_3-ba, míg az A_7A_8 szakasz A_1A_2-be forgatható. 1 pont

A szakaszaink hossza tehát az A_1-ből kiinduló átlók, illetve tízszögoldal hosszával egyenlők. 1 pont

Ezek pedig mind különböző hosszúak, hiszen ha bármelyik kettőt választjuk ki A_2, A_3, A_4, A_5 és A_6 közül, ezek felezőmerőlegesén A_1 nincs rajta. 1 pont

Összesen: 7 pont



2. Tizenhat különböző magas gyereket négy sorba és négy oszlopba állítunk. Minden sorban a legalacsonyabb felteszi a bal kezét. Közöttük Jakab a legmagasabb. Minden oszlopban a legmagasabb felteszi a jobb kezét. Közöttük Boldizsár a legalacsonyabb. Ki a magasabb, Jakab vagy Boldizsár?

Megoldás. Jakab és Boldizsár nem ugyanaz a személy, mert más a nevük.

Három eset lehet:

Ha Jakab és Boldizsár ugyanabban az oszlopban van, akkor Boldizsár a magasabb, hiszen Boldizsár azok között a legalacsonyabb, akik a saját oszlopukban a legmagasabbak. 2 pont

Ha Jakab és Boldizsár ugyanabban a sorban van, akkor is Boldizsár a magasabb, hiszen Jakab azok között a legmagasabb, akik a saját sorukban a legalacsonyabbak. 2 pont

	B		
	M	J	

Ha Jakab és Boldizsár nincs se egy sorban, se egy oszlopban, akkor keressük meg azt a gyereket, aki Jakab sorában és Boldizsár oszlopában van. Legyen ő Marci. Ekkor Marci magasabb Jakabnál és alacsonyabb Boldizsárnál az előző gondolatokat használva. Tehát Boldizsár itt is magasabb Jakabnál, vagyis minden esetben Boldizsár magasabb Jakabnál. 3 pont

Összesen: 7 pont

Megjegyzés. 1. Ha valaki csak az utolsó esetet nézi, az a 3 helyett 5 pontot kaphat, hiszen az előző esetek gondolatait is használta. Viszont ez nem teljen megoldás, tehát maximális pontszám nem jár érte.

2. Nem teljesen magától értetődő, hogy van olyan példa, amiben a soronként legalacsonyabbak közül a legmagasabb nem ugyanaz, mint az oszloponként legmagasabbak közül a legalacsonyabb. Ha valaki csak egy ilyen példát talál, és ebben a példában megállapítja, hogy Boldizsár a magasabb, az 2 pontot kaphat.

3. Az O_1 középpontú, R sugarú k_1 kört kívülről érinti az O_2 középpontú, $2R$ sugarú k_2 kör és mindkettőt ugyancsak kívülről érinti az O_3 középpontú, $3R$ sugarú k_3 kör. Bizonyítsa be, hogy az $O_1O_2O_3$ háromszög beírt köre egybevágó a k_1 körrel!

Megoldás. Jó ábra. 1 pont

Az érintés miatt az $O_1O_2O_3$ háromszög oldalai: $3R$, $4R$ és $5R$. 1 pont

Az $O_1O_2O_3$ háromszögre teljesül a Pitagorasz-tétel megfordítása, tehát a háromszög derékszögű. 1 pont

A derékszögű háromszög területe $\dfrac{ab}{2} = \dfrac{4R \cdot 3R}{2} = 6R^2$. 1 pont

Az $O_1O_2O_3$ háromszög területe a $T = rs$ összefüggés alapján:

$$T = \frac{r(3R + 4R + 5R)}{2} = 6Rr.$$ 1 pont

A két terület egyenlő, így $6R^2 = 6Rr$, azaz $r = R$. 1 pont

Két kör egybevágó, ha sugaraik megegyeznek. 1 pont

Összesen: 7 pont

4. Határozzuk meg azt a legnagyobb pozitív egész számot, amely bármely pozitív egész n-re osztója az alábbi kifejezésnek:

$$n^4(n-1)^3(n-2)^2(n-3).$$

Megoldás.

$$f(n) = n^4(n-1)^3(n-2)^2(n-3).$$

$n = 1, 2, 3$-ra $f(n) = 0$. Nullának bármely pozitív egész szám osztója. 1 pont

$$f(4) = 4^4 3^3 2^2 1 = 2^{10} 3^3,$$

$$f(5) = 5^4 4^3 3^2 2 = 2^7 3^2 5^4,$$

$$f(6) = 6^4 5^3 4^2 3 = 2^8 3^5 5^3,$$

$$f(7) = 7^4 6^3 5^2 4 = 2^5 3^3 5^2 7^4.$$

A keresett számnak az $f(4)$-et is osztania kell, ezért az osztó csak a 2 és a 3 hatványainak szorzata lehet. 1 pont

Az $f(4)$, $f(5)$ és $f(7)$ legnagyobb közös osztója a $2^5 3^2 = 288$. Belátjuk, hogy a 288 tényleg tetszőleges n-re osztója az $f(n)$-nek.

Ha n páros, akkor $(n-2)$ is páros, így a szorzat osztható $2^4 \cdot 2^2 = 2^6$-nal.

Ha n páratlan, akkor $(n-1)$ és $(n-3)$ is páros. Minden második páros szám néggyel osztható, ezért az $(n-1)$ és $(n-3)$ közül az egyik néggyel is osztható. Attól függően, hogy $(n-1)$ vagy $(n-3)$ osztható néggyel, az $f(n)$ osztható $4^3 \cdot 2 = 2^7$-nel vagy $2^3 \cdot 4 = 2^5$-nel.

Így tetszőleges n-re 2^5-nel osztható biztosan a kifejezés. 2 pont

n, $(n-1)$, $(n-2)$ közül, azaz három egymás utáni egész szám közül az egyik osztható 3-mal. Így az $f(n)$ biztosan osztható tetszőleges pozitív egész n-re 3^2-nel. 2 pont

Tehát $2^5 3^2 = 288$-cal osztható a $n^4(n-1)^3(n-2)^2(n-3)$ kifejezés tetszőleges pozitív egész n-re. 1 pont

Összesen: 7 pont

5. Az x számról tudjuk, hogy $x + \dfrac{1}{x} = 4$. Számítsa ki $\dfrac{x^2}{x^4+1} + \dfrac{1}{x^2} + x^2$ értékét!

(Olyan formában megadott érték számít teljes értékű megoldásnak, amiből kiderül, hogy a szám racionális-e vagy nem, és az is, hogy melyik a hozzá legközelebbi egész.)

Megoldás.

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = 14,$$ 3 pont

$$\frac{x^2}{x^4+1} = \frac{1}{x^2 + \frac{1}{x^2}},$$ 3 pont

tehát

$$\frac{x^2}{x^4+1}+\frac{1}{x^2}+x^2=14+\frac{1}{14}.$$ 1 pont

Összesen: 7 pont

Megjegyzés. Több más indulás is lehetséges, de ezek csak hosszabb számolás után vezetnek célra.

Ha valaki x meghatározásával kezdi, azért 2 pont jár. Mindkét lehetséges x érték esetén x^2 kiszámolása 1 pont, x^4 kiszámolása 1 pont. Ezeket persze elég gyökös alakban megadni. $x^2+\frac{1}{x^2}$ kiszámolása további 1 pont, de ennek már csak a pontos értéke értékelhető gyökmentes alakban.

Ha valaki közös nevezőre hoz, de utána nincs lényegi továbblépés, nem kaphat pontot. Természetesen ha továbbmegy, és lényegesen közelebb kerül a megoldáshoz, arányosan jár a pont.