Sorozatok

⋆ sorozat: a_1, a_2, a_3,…,a_n,…
- ∗ megadás: definícióval
  - ∗ rekurzív: előző tag(ok)ra hivatkozunk, pl.
    $f_1 = 1$, $f_2 = 1$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, vagy
    $a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + 1$
  - ∗ nem rekurzív: nem hivatkozunk előző tag(ok)ra, pl.
    $a_n = 2^n$ vagy $p_n = n$. prímszám
- ∗ első n tag összege: $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, pl.
  $S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$

⋆ számtani sorozat
- ∗ szomszédos tagok *különbsége* állandó:
  $d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \ldots$, pl.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & \overset{+3}{\frown} & & \overset{+3}{\frown} & & \overset{+3}{\frown} & & \overset{+3}{\frown} & \\
a_1 = 2 & & a_2 = 5 & & a_3 = 8 & & a_4 = 11 & & a_5 = 14 \\
 & 5-2=3 & & 8-5=3 & & 11-8=3 & & 14-11=3 &
\end{array}
$$

  d neve: *differencia* vagy *különbség*
- ∗ ha $d > 0$, akkor a sorozat növekedő,
  ha $d < 0$, akkor csökkenő,
  ha $d = 0$, akkor állandó tagú
- ∗ egy tag a két mellette levő számtani közepe: $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$,
  általánosan: $a_n = \dfrac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}$
- ∗ $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$
- ∗ $S_n = n \cdot \dfrac{2a_1 + (n-1) \cdot d}{2} = n \cdot \dfrac{a_1 + a_n}{2}$
  - ∗ sok feladatban az S_n adott, melyre egyenlet írható fel
  - ∗ egyenletrendezésnél:
    - · ha beszorzunk kettővel:

$$n \cdot \frac{2a_1 + (n-1) \cdot d}{2} = \ldots \quad / \cdot 2$$
$$n \cdot [2a_1 + (n-1) \cdot d] = 2 \cdot \ldots$$

    - · azaz az n-et *nem szorozzuk be* kettővel
    - · a tört számlálója zárójelbe kerül
    - · ha az n az ismeretlen, akkor *másodfokú egyenlet*et kell megoldani
- ∗ ha az S_n adott és az n a kérdés, akkor $a_1 = 2$, $d = 3$, $S_n = 40$ esetén a következő „kézzel számolós” technika is használható:

$$
\begin{array}{llll}
a_1 = 2 & \to & S_1 = 2 & \\
a_2 = 5 & \to & S_2 = 7 & = S_1 + a_2 \\
a_3 = 8 & \to & S_3 = 15 & = S_2 + a_3 \\
a_4 = 11 & \to & S_4 = 26 & = S_3 + a_4 \\
a_5 = 14 & \to & S_5 = 40 & = S_4 + a_5
\end{array}
$$

  azaz az első öt tag összege egyenlő 40-nel. Ha a keresett n nagy, akkor sokáig kell számolni.
- ∗ felismerése szöveges feladatokban: valami mindig ugyanazzal a konkrét értékkel növekszik vagy csökken (nem százalékos növekedés!)

⋆ mértani sorozat
- ∗ szomszédos tagok *hányadosa* állandó $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \ldots$
- ∗ q neve: *kvóciens* vagy *hányados*
- ∗ ha $q = 0$, akkor a sorozat a második tagjától kezdve nulla (ekkor a szomszédos tagok hányadosa nem értelmezhető)
- ∗ ha $|q| > 1$, akkor a sorozat (abszolútértékben) növekedő
  ha $0 < |q| < 1$, akkor a sorozat (abszolútértékben) csökkenő
  ha $|q| = 1$, akkor a sorozat (abszolútértékben) állandó
  ha $q > 0$, akkor a sorozat tagjai azonos előjelűek, ha $q < 0$, akkor váltott előjelűek (egyszer pozitív, utána negatív – vagy csupa nulla)
- ∗ egy tag a két mellette levő mértani közepe: $a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$,
  általánosan $a_n = \sqrt{a_{n-k} \cdot a_{n+k}}$
- ∗ $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
  - ∗ ha a q a kérdés, gyökvonással kaphatjuk meg: $\sqrt[n-1]{\dfrac{a_n}{a_1}}$
  - ∗ ha az n a kérdés, akkor exponenciális egyenlet (logaritmus)
- ∗ $S_n = a_1 \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$ (ha $q \neq 1$; $q = 1$ esetén állandó tagú a sorozat, így $S_n = n \cdot a_1$)
  - ∗ ha az n a kérdés, akkor a feladat egy exponenciális egyenlet (n a kitevőben), amelyet sokszor logaritmus használatával oldunk meg (q^n kifejezése, majd $\log_q$)
- ∗ felismerése szöveges feladatokban: valami mindig ugyanannyiszorosára nő vagy csökken vagy mindig ugyanannyi százalékkal nő vagy csökken
- ∗ gyakori feladattípusok
  - ∗ kamatos kamat
  - ∗ termelés százalékos növekedése/csökkenése
  - ∗ fizikai alkalmazások (pl. radioaktív bomlás)
- ∗ „pénzügyes” típusfeladatok
  - ∗ kamatos kamat: egy adott pénzösszeg kamatozik, minden időszakban ugyanannyit. A kamat bennmarad a bankban, és az is kamatozni fog. Ha B a befektetett összeg, p a kamat, akkor n év alatt $B \cdot p^n$ pénzt kapunk. Ebben a feladattípusban nincs értelme S_n-ről kérdezni.
  - ∗ rendszeres megtakarítás: időközönként adott összeget befizetünk, majd egy idő múlva felvesszük a kamattal növelt pénzt. Ekkor az első év elején befizetett pénz n évet, a második év elején befizetett $n-1$,…, az utolsó év elején befizetett pénz 1 évet kamatozik.
    A kapott pénz:
    $B \cdot (1+p)^n + B \cdot (1+p)^{n-1} + \cdots + B \cdot (1+p)^2 + B \cdot (1+p) = S_n$,
    azaz:
$$B \cdot (1+p) \cdot \frac{(1+p)^n - 1}{(1+p) - 1},$$
    ahol B a rendszeresen fizetett összeg, p a kamat, n a befizetések száma.
  - ∗ annuitás (hiteltörlesztés egyenlő részletekben):
$$H \cdot (1+p)^n = R \cdot \frac{(1+p)^n - 1}{(1+p) - 1},$$
    ahol
    - · H a felvett hitelösszeg
    - · p a kamat
    - · n a törlesztési periódusok száma
    - · R a havonta fizetett (törlesztő)részlet

    H és R könnyen meghatározható (a többi adat ismeretében), az n meghatározásához logaritmus kell. A p esetében már egy „sokadfokú” egyenletet kapunk, amelynek megoldása csak közelítéses módszerrel lehetséges.
    Képlet „levezetése” (és a „kézzel számolás” leírása): az adott évek végén a következő pénzmennyiséggel „tartozunk” (az előző évi tartozás kamattal növelt összege, csökkentve egy törlesztőrészlettel):

1.	$H \cdot (1+p) - R$
2.	$(H \cdot (1+p) - R) \cdot (1+p) - R$
3.	$\boxed{(H \cdot (1+p) - R) \cdot (1+p) - R} \cdot (1+p) - R$

    Zárójeleket felbontva, az n-edik év végén levő tartozás:

$$H \cdot (1+p)^n - R \cdot \Big[(1+p)^{n-1} + (1+p)^{n-2} + \ldots$$
$$\ldots + (1+p)^2 + (1+p)^1 + 1\Big] =$$
$$= H \cdot (1+p)^n - R \cdot \frac{(1+p)^n - 1}{(1+p) - 1}$$

    Amikor a tartozást visszafizetjük, a fennmaradó tartozás (értelemszerűen) nullával egyenlő.