Egyenletek, egyenlőtlenségek típusai, megoldási módok

Az $f(x)$ és $g(x)$ mindenhol valami x-es kifejezést jelöl!

Törtes egyenlőtlenség

Először is: ismeretlent tartalmazó kifejezéssel *egyenlőtlenséget* csak legvégső elkeseredésben szorzunk, ui. negatív számmal való szorzás ill. osztás esetén az egyenlőtlenség iránya megfordul – honnan tudod, hogy az a kifejezés nem-e negatív?

Megoldás:

1. számlálót és nevezőt szorzattá alakítjuk
2. nullára redukáljuk – sokszor szokott kelleni közös nevezőre hozás (ekkor ne feledjük, hogy ahol törtvonal van, oda a közös törtvonalon zárójel kell)
3. számegyeneses ábrázolás (szaggatott vonal, folytonos vonal, üres karika, teli karika, stb.)

Ahány különálló részre esik szét a tartomány, annyi különálló egyenlőtlenség kell.

Abszolútértékes egyenlet

Két eset van:

- ⋆ $|f(x)| = c$ (ahol $c \in \mathbb{R}$ – tehát valami szám) alakú:
  1. $f(x) = c \Rightarrow$ megoldod
  2. $f(x) = -c \Rightarrow$ megoldod
- ⋆ $|f(x)| = g(x)$ alakú:
  1. $f(x) = g(x) \Rightarrow$ megoldod
  2. $f(x) = -g(x) \Rightarrow$ megoldod

Nagyon fontos: *mindenféleképpen ellenőrizni*!!

Másodfokú egyenlőtlenség

Megoldás:

1. nullára redukáljuk
2. meghatározzuk a zérushelyeket (másodfokú egyenlet megoldóképlete)
3. vázoljuk a parabolát (felfelé nyílik, lefelé nyílik, stb.)
4. az x-tengelymetszetek lesznek a zérushelyek
5. leolvassuk, melyik részen pozitív vagy negatív (ahány különálló rész a grafikonon, annyi különálló egyenlőtlenség lesz)

Elképzelhető, hogy nincs zérushely, azaz a parabolának *nincs* közös pontja az x-tengellyel. Ekkor felfelé nyíló parabola esetén a parabola az x-tengely *felett*, különben az x-tengely *alatt* helyezkedik el. Ekkor minden érték pozitív ill. negatív.

Négyzetgyökös egyenlet

Általában $\sqrt{f(x)} = g(x)$ alakú, tehát nincs benne két gyökjel. Megoldás:

1. kikötés: a négyzetgyökjel *alatt* szereplő kifejezés nemnegatív ($0 \leq$)
2. gyökjel egyik oldalra, többi a másik oldalra
3. négyzetre emelés (*nevezetes azonosság!!!*):
   (a) a négyzetgyökjel „eltűnik"
   (b) a másik oldalt *zárójelbe* rakod, rá a négyzet-jel
   (c) a következő lépésben végzed el a négyzetre emelést (általában nevezetes azonosság használatával)
4. további megoldás
5. ellenőrzés *elengedhetetlen* (hamis gyökök)

Trigonometrikus egyenlet

Valamilyen szögfüggvénye szerepel az ismeretlennek (sin, cos, tg).
A fő cél, hogy egyfajta szögfüggvény legyen. Ehhez általában azonosságokat használunk.
Ha van az egyenletben $\sin^2$ vagy $\cos^2$, akkor szinte biztos, hogy másodfokúra visszavezethető egyenletről van szó, és a $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ azonosságot kell használni.

Gyökcsoportok (mindenhova $k \in \mathbb{Z}$ odaírandó):

- ⋆ sin esetén:
  - ∗ $x =$ (számológép által visszaadott érték) $+ k \cdot 2\pi$
  - ∗ $x = \pi -$ (számológép által visszaadott érték) $+ k \cdot 2\pi$
- ⋆ cos esetén:
  - ∗ $x =$ (számológép által visszaadott érték) $+ k \cdot 2\pi$
  - ∗ $x = -$(számológép által visszaadott érték) $+ k \cdot 2\pi$
    (vagy $x = 2\pi -$ (számológép által visszaadott érték) $+ k \cdot 2\pi$)
- ⋆ tg esetén:
  - ∗ $x =$ (számológép által visszaadott érték) $+ k \cdot \pi$

Logaritmusos egyenlet

Kikötés nagyon fontos, pont járhat érte (aminek a logaritmusát vesszük, csakis pozitív lehet).

Logaritmus azonosságaival olyan alakra hozzuk, hogy

$$\log_a f(x) = \log_a g(x)$$

tehát mindkét oldalon egy-egy kifejezés logaritmusa szerepel, *SEMMI MÁS*!

Ezután *„log. fgv. szig. mon. miatt"*, $f(x) = g(x)$, és oldjuk tovább.

Elképzelhető *másodfokúra visszavezethető* logaritmusos egyenlet is, azaz valamilyen $\log_a^2$ szerepel. Ekkor a szokásos $y = \log_a f(x)$, y-ra megold, majd *visszaír*!

Szokásos dolog, ha az egyik oldalon egy szám szerepel, és azt át kell írni logaritmusra: $b = \log_a a^b$ - tudjuk, nem gondolkodik, ész nélkül átír! Pl. $3 = \log_4 4^3$.

Exponenciális egyenlet

A kitevőben szerepel ismeretlen.

Az első gondolat:

$$a^{f(x)} = a^{g(x)}$$

alakra hozni. Ilyen inkább csak a rövid részben van (ekkor *„exp. fgv. szig. mon. miatt"* után $f(x) = g(x)$). Hasonlóan, mint a logaritmus esetén itt is mind a két oldalon *egy-egy* hatvány szerepeljen! Tehát „a a valahanyadikon" egyenlő „a a másvalahanyadikon".

Típusok:

- ⋆ „egyszerű"
  - ∗ $a^{f(x)} = b$ alakú ($b \in \mathbb{R}$), pl. $3^{x+3} = 81$
  - ∗ megoldás:
    1. a b számot a hatványaként írjuk fel ($3^{x+3} = 3^4$)
    2. „exp. fgv. szig. mon. miatt"
    3. $f(x) =$ kitevő ($x + 3 = 4$)
    4. megoldjuk ($x = 1$)
  - ∗ ilyen típus inkább a rövid (első) részben fordul elő
- ⋆ „lebontogatós"
  - ∗ azonosak az alapok, a kitevők különböznek, de minden esetben „ugyanannyiszor x", pl.: 5^x és 5^{x+1} és 5^{x+2}, azaz *nincs* $2x$, $3x$, stb.
  - ∗ megoldás:
    1. legkisebb kitevőt kiválasztjuk, és a többit ilyenre írjuk át, pl. $5^{x+2} = 5^x \cdot 5^2$
    2. az $5^x \cdot 5^2$-szerűeket „kiszámoljuk": $25 \cdot 5^x$
    3. értékeket összeadjuk: $5^x + 5 \cdot 5^x + 25 \cdot 5^x = 31 \cdot 5^x$
    4. osztunk (esetünkben 31-gyel)
    5. jó esetben a másik oldalon 5-nek egy egész kitevős hatványa áll
- ⋆ másodfokúra visszavezethető exponenciális egyenlet
  - ∗ különböző alapok vannak, de azok közül egyik a másiknak négyzete (pl. 5^x és 25^x és hasonlóak)
  - ∗ azonos alapok, de az egyik kitevő a másiknak duplája (pl. 5^{x+1} és 5^{2x+2}), illetve majdnem a duplája, csak egy szám különbség van, ekkor az azonos kitevőre hozás esetét kell használni