

# Sorozatok – monotonitás, korlátosság, határérték

1. Vizsgálja meg a következő sorozatokat monotonitás és korlátosság szempontjából!

- |   |   |                              |  |                               |   |
|---|---|------------------------------|--|-------------------------------|---|
| a) $\frac{3n-1}{2n+7}$  | <input type="text" value="növekedő, korlátos"/>         | b) $\frac{5n-2}{3n+4}$       | <input type="text" value="növekedő, korlátos"/>          | c) $\frac{6n+2}{7n-1}$        | <input type="text" value="növekedő, korlátos"/>         |
| d) $ n-23  -  n-10 $  | <input type="text" value="csökkenő, korlátos"/>         | e) $ n-10  +  n+3 $          | <input type="text" value="alulról korlátos, növekedő"/>  | f) $ 2x+3  -  x-10 $          | <input type="text" value="alulról korlátos, növekedő"/> |
| g) $(-1)^n + (-1)^{n-1}$  | <input type="text" value="korlátos"/>                   | h) $(-2)^n + 2^n$            | <input type="text" value="alulról korlátos"/>            | i) $2 + (-1)^{n-1} \cdot 3^n$ | <input type="text" value="-"/>                          |
| j) $\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right)\right)^2$ | <input type="text" value="korlátos, állandó"/>          | k) $\frac{3n+2}{4n+1}$       | <input type="text" value="korlátos, csökkenő"/>          |                               |   |
| l) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$  | <input type="text" value="csökkenő, korlátos"/>         | m) $\sqrt{n+3} - \sqrt{n-1}$ | <input type="text" value="csökkenő, korlátos"/>          | n) $\sqrt{n^2+5} - n$         | <input type="text" value="csökkenő, korlátos"/>         |
| o) $\frac{5n^2-37}{7n-2}$   | <input type="text" value="alulról korlátos, növekedő"/> | p) $\frac{2-13n^2}{n^3+1}$   | <input type="text" value="csökkenő, felülről korlátos"/> | q) $\frac{2n^2-5}{5n+117}$    | <input type="text" value="alulról korlátos, növekedő"/> |

2. Igazold definíció szerint (adott  $\varepsilon$ -ra), hogy az  $a_n$  sorozatoknak határértéke  $A$ !

- |  |                                  |   |                                 |  |                                  |
|--|----------------------------------|---|---------------------------------|--|----------------------------------|
| a) $a_n = \frac{-8n-6}{-n+3}$<br>$A = 8, \varepsilon = 0,12$               | <input type="text" value="253"/> | b) $a_n = \frac{6n-7}{9n+7}$<br>$A = \frac{2}{3}, \varepsilon = 0,2$    | <input type="text" value="9"/>  | c) $a_n = \frac{5n-6}{2n+7}$<br>$A = \frac{5}{2}, \varepsilon = 0,12$    | <input type="text" value="95"/>  |
| d) $a_n = \frac{5n+7}{7n+1}$<br>$A = \frac{5}{7}, \varepsilon = 0,08$      | <input type="text" value="12"/>  | e) $a_n = \frac{4n-8}{-8n-6}$<br>$A = -\frac{1}{2}, \varepsilon = 0,08$ | <input type="text" value="17"/> | f) $a_n = \frac{-9n-10}{9n+10}$<br>$A = -1, \varepsilon = 0,12$          | <input type="text" value="2"/>   |
| g) $a_n = \frac{7n+2}{-n-4}$<br>$A = -7, \varepsilon = 0,04$               | <input type="text" value="949"/> | h) $a_n = \frac{7n+4}{8n+9}$<br>$A = \frac{7}{8}, \varepsilon = 0,1$    | <input type="text" value="4"/>  | i) $a_n = \frac{8n+4}{3n+6}$<br>$A = \frac{8}{3}, \varepsilon = 0,02$    | <input type="text" value="181"/> |
| j) $a_n = \frac{-3n-2}{-10n+10}$<br>$A = \frac{3}{10}, \varepsilon = 0,14$ | <input type="text" value="5"/>   | k) $a_n = \frac{6n+5}{9n+5}$<br>$A = \frac{2}{3}, \varepsilon = 0,12$   | <input type="text" value="1"/>  | l) $a_n = \frac{-3n+4}{n-2}$<br>$A = -3, \varepsilon = 0,08$             | <input type="text" value="27"/>  |
| m) $a_n = \frac{7n+9}{-4n-6}$<br>$A = -\frac{7}{4}, \varepsilon = 0,18$    | <input type="text" value="1"/>   | n) $a_n = \frac{4n-2}{-7n-8}$<br>$A = -\frac{4}{7}, \varepsilon = 0,1$  | <input type="text" value="6"/>  | o) $a_n = \frac{-6n-8}{-10n-5}$<br>$A = \frac{3}{5}, \varepsilon = 0,02$ | <input type="text" value="25"/>  |

$$p) a_n = \frac{-3n-1}{-10n+4}$$

$$A = \frac{3}{10}, \varepsilon = 0,16$$

$$q) a_n = \frac{10n-3}{-4n-8}$$

$$A = -\frac{5}{2}, \varepsilon = 0,2$$

$$r) a_n = \frac{3n-6}{-5n+3}$$

$$A = -\frac{3}{5}, \varepsilon = 0,04$$

$$s) a_n = \frac{8n-2}{-8n-9}$$

$$A = -1, \varepsilon = 0,04$$

$$t) a_n = \frac{5n+9}{10n-9}$$

$$A = \frac{1}{2}, \varepsilon = 0,18$$

$$u) a_n = \frac{3n-8}{-4n-8}$$

$$A = -\frac{3}{4}, \varepsilon = 0,08$$

$$v) a_n = \frac{5n-3}{10n-8}$$

$$A = \frac{1}{2}, \varepsilon = 0,1$$

$$w) a_n = \frac{n+3}{10n+2}$$

$$A = \frac{1}{10}, \varepsilon = 0,02$$

$$x) a_n = \frac{-8n-5}{-6n+10}$$

$$A = \frac{4}{3}, \varepsilon = 0,2$$

### 3. Határozza meg a következő sorozatok határértékét!

Határérték számítók:

- <https://www.symbolab.com/solver/limit-calculator> (főoldalról: Solutions → Calculus → Limits)
- <https://www.wolframalpha.com/> (limit(*kifejezés*))

$$a) \frac{(-1)^n}{n}$$

$$b) \frac{5n-3}{2n+1}$$

$$c) \frac{2n+1}{7n-5}$$

$$d) \sqrt{n+3} - \sqrt{n}$$

$$e) \sqrt{n+17} - \sqrt{n+3}$$

$$f) \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{n^3}$$

$$g) \frac{2n^2-5}{5n+1}$$

$$h) \frac{1+3+\dots+(2n-1)}{1+2+\dots+n}$$

$$i) \frac{\sqrt{n+2} + 5\sqrt{n+3}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$$j) \frac{n^5 - 12n^3 + 34}{n^6 + n^2 - 123}$$

$$k) \frac{10^n + 10^2}{5^n + 2^n + 10^5}$$

$$l) \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$$

$$m) \sqrt{4n^2 + 5n + 2} - 2n$$

$$n) \left(\frac{n-3}{n-5}\right)^{3n}$$

$$o) \left(\frac{n+5}{n+6}\right)^{2n}$$

$$p) \left(\frac{5n+3}{5n+7}\right)^{5n}$$

$$q) \left(\frac{5n+3}{5n+7}\right)^{2n}$$

$$r) \left(\frac{n^2+2}{n^2+3}\right)^{n^2+3}$$

### 4. Határozd meg a formulával megadott sorozatok végtelenben vett határértékeit!

$$a) \frac{6n^2+6n-6}{2n^2+10n-4}$$

$$b) \frac{n^2-4n+2}{-9n+6}$$

$$c) \frac{-5n^3+3n^2-8n+9}{n^3+7n^2+n-9}$$

$$d) \frac{n^3-9n^2-2n-3}{-4n^3-3n^2-4n+2}$$

$$e) \frac{-6n+9}{7n+5}$$

$$f) \frac{8n^2-4n-10}{7n^2-5n+5}$$

$$g) \frac{-5n^2+6n}{10n^2+5n+4}$$

$$h) \frac{n^3-4n^2-8n}{2n^3+6n^2-10n+10}$$

$$i) \frac{-6n^2-4n+2}{7n^3-3n^2-2n-4}$$

$$j) \frac{-9n^2+5n+3}{-2n}$$

$$k) \frac{2n^2-4n+2}{-4n^2-7n-4}$$

$$l) \frac{-5n-2}{9n-10}$$

m) $\frac{n-2}{-6n+5}$	$\frac{9}{1}-$	n) $\frac{-3n^2-2n-1}{8n^3-8n^2-7n+10}$	0	o) $\frac{-n}{9n-2}$	$\frac{6}{1}-$
p) $\frac{5n^2-7n-1}{-6n^2+2n-5}$	$\frac{9}{5}-$	q) $\frac{5n^3-3n^2+5n-7}{-n^2+2n+1}$	$\infty-$	r) $\frac{2n+2}{-2n^2+n+5}$	0
s) $\frac{-5n^2+8n-2}{9n^3-10n^2-3n+1}$	0	t) $\frac{-7n+8}{6n+1}$	$\frac{9}{1}-$	u) $\frac{5n-4}{9n}$	$\frac{6}{5}$
v) $\frac{-9n^2+3n-1}{n+7}$	$\infty-$	w) $\frac{-6n+3}{7n}$	$\frac{1}{9}-$	x) $\frac{-7n^2-7n-6}{-5n-4}$	$\infty+$

5. Határozd meg a formulával megadott sorozatok végtelenben vett határértékeit!

a) $\left(1 - \frac{9}{10n+5}\right)^{4n}$	$\frac{9}{81}-\partial$	b) $\left(1 - \frac{6}{5n-9}\right)^{-3n}$	$\frac{9}{81}\partial$	c) $\left(1 + \frac{8}{2n-5}\right)^{2n}$	$8\partial$
d) $\left(1 - \frac{1}{10n-4}\right)^{6n}$	$\frac{9}{81}-\partial$	e) $\left(1 + \frac{3}{8n-7}\right)^{-3n}$	$\frac{8}{6}-\partial$	f) $\left(1 + \frac{1}{7n+1}\right)^{-6n}$	$\frac{1}{9}-\partial$
g) $\left(1 - \frac{9}{7n+3}\right)^{-4n}$	$\frac{1}{9}\partial$	h) $\left(1 + \frac{10}{4n+8}\right)^{10n}$	$\frac{9}{9}\partial$	i) $\left(1 - \frac{7}{5n+5}\right)^{5n}$	$1-\partial$
j) $\left(1 - \frac{4}{4n-3}\right)^{-6n}$	$9\partial$	k) $\left(1 + \frac{9}{2n+10}\right)^{3n}$	$\frac{1}{1}\partial$	l) $\left(1 - \frac{3}{8n-2}\right)^{10n}$	$\frac{1}{81}-\partial$
m) $\left(1 - \frac{4}{10n-3}\right)^{5n}$	$1-\partial$	n) $\left(1 - \frac{3}{7n+3}\right)^{6n}$	$\frac{1}{81}-\partial$	o) $\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)^{-n}$	$\frac{9}{1}\partial$
p) $\left(1 - \frac{3}{5n+5}\right)^{-6n}$	$\frac{9}{81}\partial$	q) $\left(1 + \frac{1}{6n-8}\right)^{10n}$	$\frac{9}{9}\partial$	r) $\left(1 + \frac{2}{5n+1}\right)^{-8n}$	$\frac{9}{91}-\partial$
s) $\left(1 - \frac{6}{6n-1}\right)^{6n}$	$9-\partial$	t) $\left(1 - \frac{5}{2n-9}\right)^{-3n}$	$\frac{1}{91}\partial$	u) $\left(1 + \frac{9}{10n+7}\right)^{5n}$	$\frac{9}{6}\partial$
v) $\left(1 - \frac{5}{n-4}\right)^{3n}$	$\frac{9}{1}-\partial$	w) $\left(1 + \frac{2}{9n-7}\right)^{2n}$	$\frac{9}{1}\partial$	x) $\left(1 + \frac{8}{9n+7}\right)^{3n}$	$\frac{9}{9}\partial$