Koordinátageometria – összetett példák

1. Egy ABC háromszög oldalainak felezőpontjai adottak (A_1, B_1 és C_1). Számítsuk ki az ABC háromszög csúcspontjának koordinátáit!

   a) $A_1(-2;1)$, $B_1(4;3)$, $C_1(2;3)$ — $A(8;5)$, $B(-4;1)$, $C(0;1)$

   b) $A_1(5;5)$, $B_1(1;2)$, $C_1(3;9)$ — $A(-1;6)$, $B(7;12)$, $C(3;-2)$

2. Igazoljuk, hogy az

   a) $A(1;3)$, $B(4;7)$, $C(2;8)$, $D(-1;4)$

   b) $A\left(\frac{3}{2};1\right)$, $B(2;5)$, $C(3;-2)$, $D\left(\frac{5}{2};-6\right)$

   c) $A(1;2)$, $B(-5;1)$, $C\left(-6;-\frac{1}{2}\right)$, $D\left(0;\frac{1}{2}\right)$

   pontok egy paralelogramma csúcsai.

   Ötlet: egy négyszög paralelogramma, ha szemközti oldalai egyenlő hosszúak *vagy* párhuzamosak.

3. Adott a paralelogramma három csúcsa. Határozzuk meg a negyedik csúcs koordinátáit!

   Ötlet: a paralelogramma *átlói* felezik egymást.

   a) $(0;0)$, $(3;1)$, $(1;3)$ — $(-2;2)$ vagy $(2;-2)$ vagy $(4;4)$

   b) $(4;2)$, $(5;3)$, $(6;-4)$ — $(5;-5)$ vagy $(7;-3)$ vagy $(3;9)$

   c) $(1;4)$, $(3;2)$, $(6;5)$. — $(8;3)$ vagy $(4;7)$ vagy $(-2;1)$

4. Egy paralelogramma két szomszédos csúcspontjának koordinátái: $A(9;-3)$ és $B(0;3)$. A paralelogramma középpontjának koordinátái $(1;6)$. Számítsuk ki a másik két csúcs koordinátáit.

   $C(-7;15)$, $D(2;9)$

5. Számítsuk ki a háromszög kerületét, ha a csúcsának koordinátái:

   a) $(2;3)$, $(5;7)$, $(10;-3)$ — $15+5\sqrt{5}$

   b) $(3;4)$, $(-7;-6)$, $(5;-1)$ — $10\sqrt{2}+13+\sqrt{29}$

   c) $(-1;-1)$, $(3;7)$, $(3;-5)$ — $4\sqrt{5}+12+4\sqrt{2}$

6. Igazoljuk, hogy az alábbi pontok egy-egy egyenlő szárú háromszög csúcsai. Számítsuk ki a területét!

   a) $(3;2)$, $(7;-2)$, $(6;1)$ — 4

   b) $(1;3)$, $(3;-1)$, $(7;-3)$ — 6

7. Egy egyenlő szárú háromszög alapjának csúcsa az $A(2;1)$ és a $B(6;5)$ pontok. A harmadik csúcsa az x tengelyen van. Mekkora a háromszög területe?

   12

8. Igazoljuk, hogy a

   a) $(10;4)$, $(3;-5)$, $(1;1)$

   b) $(2;4)$, $(-2;3)$, $(8;-20)$

   koordinátájú pontok derékszögű háromszöget határoznak meg!

   Ötlet: Pitagorasz-tétel vagy bezárt szög

9. Egy egyenlő szárú derékszögű háromszög átfogójának végpontjai: $A(2;1)$ és $B(-4;3)$. Számítsuk ki a harmadik csúcs koordinátáit!

   $C_1(0;5)$, $C_2(-2;-1)$

10. Egy háromszög csúcsai a $(3; -1)$, $(2; 4)$ és $(-1; 5)$ koordinátájú pontok. Számítsuk ki a háromszög szögeit és a területét.

$\boxed{\alpha = 38°,\ \beta = 22{,}3°,\ \gamma = 119{,}7°,\ T = 7}$

11. Egy szabályos háromszög két csúcsának koordinátái: $A(4; 3)$, $B(8; 0)$. Számítsuk ki a harmadik csúcs koordinátáit.

$\boxed{C_1\left(\frac{12+3\sqrt{3}}{2}; \frac{3+4\sqrt{3}}{2}\right),\ C_2\left(\frac{12-3\sqrt{3}}{2}; \frac{3-4\sqrt{3}}{2}\right)}$

12. Egy kör középpontja a $P(0; -13)$ pont és érinti az x tengelyt. Ellenőrizzük, hogy a kör áthalad-e a $P_1(11; -6)$ és a $P_2(-5; -1)$ pontokon.

$\boxed{P_1 \text{ nem, } P_2 \text{ igen}}$

13. Határozzuk meg az x tengely azon pontjának koordinátáit, amely egyenlő távol van az origótól és a $(9; -3)$ ponttól.

$\boxed{P(5; 0)}$

14. Határozzuk meg az x tengelynek azt a pontját, amely a $(2; 1)$ és a $(6; 5)$ koordinátájú pontoktól egyenlő távolságra van.

$\boxed{P(7; 0)}$

15. Számítsuk ki a háromszög köré írható kör középpontjának koordinátáit és a kör sugarát, ha a csúcsának koordinátái:

a) $(7; 7)$, $(0; 8)$, $(-2; 4)$ $\boxed{K(3; 4),\ r = 5}$

b) $(0; 2)$, $(1; 1)$, $(2; -2)$ $\boxed{K(-3; -2),\ r = 5}$

c) $(1; 5)$, $(8; 2)$, $(-6; -2)$ $\boxed{K\left(\frac{9}{5}; -\frac{14}{5}\right),\ r = 7{,}84}$

d) $(2; 1)$, $(-3; 2)$, $(-1; -4)$ $\boxed{K\left(-\frac{13}{14}; -\frac{9}{14}\right),\ r = 3{,}36}$

e) $(4; 0)$, $(1; 2)$, $(3; -6)$ $\boxed{K\left(-\frac{49}{20}; \frac{1}{5}\right),\ r = 4{,}52}$

16. Határozzuk meg a $2x - y + 3 = 0$ egyenletű egyenesnek azt a pontját, amelynek koordinátái egyenlők.

$\boxed{P(-3; -3)}$

17. Írjuk fel a háromszög súlyvonalainak egyenletét, ha a csúcspontok koordinátái:

a) $A(3; 7)$, $B(1; 1)$, $C(8; -4)$

$\boxed{\begin{array}{l} s_a: 17x + 3y = 72 \\ s_b: x - 9y = -8 \\ s_c: 4x + 3y = 20 \end{array}}$

b) $A(2; 3)$, $B(-4; -2)$, $C(6; -6)$

$\boxed{\begin{array}{l} s_a: 7x - y = 11 \\ s_b: x - 16y = 28 \\ s_c: 13x + 14y = -6 \end{array}}$

18. Számítással igazoljuk, hogy az $A(-3; 4)$, $B(1; 8)$, $C(5; 3)$ csúcsokkal megadott háromszög súlyvonalai egy pontban metszik egymást.

19. Adottak egy háromszög két csúcspontjának (A, B) és magasságpontjának (M) koordinátái. Határozzuk meg a harmadik csúcspont koordinátáit.

a) $A(-6; 2)$, $B(2; -2)$, $M(1; 2)$ $\boxed{C(2; 4)}$

b) $A(3; -1)$, $B(5; 7)$, $M(4; -1)$ $\boxed{C\left(5; -\frac{5}{4}\right)}$

c) $A(2; 1)$, $B(4; 9)$, $M(3; 4)$ $\boxed{C(67; -12)}$

20. Bizonyítsuk be, hogy az $x + 2y + 1 = 0$, $6x - 3y = 5$, $y = 2x - 1$, $4x + 8y + 7 = 0$ egyenletű egyenesek téglalapot határolnak.

21. Számítsuk ki a P pontnak az e egyenestől mért távolságát, ha

a) $P(1; 2)$, $e: y = -2x + 2$ $\boxed{\frac{2\sqrt{5}}{5}}$

b) $P(-3; 2)$, $e: 4x - 3y = 7$ $\boxed{5}$

c) $P(1; 9)$, $e: 3x + 4y + 8 = 0$ $\boxed{\frac{47}{5}}$

d) $P(-3; 9)$, $e: x - y = 2$ $\boxed{7\sqrt{2}}$

e) $P(4; -2)$, $e: 8x - 15y - 11 = 0$ $\boxed{3}$

f) $P(1; 1)$, $e: \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ $\boxed{0{,}2774}$

g) $P(-2; 0)$, $e: 3x + y = 10$ $\boxed{5{,}06}$

22. Számítsuk ki a háromszög területét, ha a csúcsainak koordinátái:

a) $(-2;-1)$, $(6;1)$, $(1;6)$ $\boxed{25}$

b) $(0;0)$, $(4;8)$, $(2;14)$ $\boxed{20}$

c) $(2;5)$, $(7;-1)$, $(0;0)$ $\boxed{18,5}$

d) $(1;3)$, $(-1;4)$, $(0;0)$ $\boxed{3,5}$

e) $(4;0)$, $(-4;0)$, $(3;8)$ $\boxed{32}$

f) $(5;10)$, $(11;15)$, $(15;14)$ $\boxed{13}$

23. Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely az y tengelyt az origóban *érinti*, és áthalad az $A(-6;0)$ ponton. $\boxed{(x+3)^2+y^2=9}$

24. Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely az x tengelyt az origóban érinti és áthalaz a $(0;4)$ ponton. $\boxed{x^2+(y-2)^2=4}$

25. Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely áthalad a megadott ponton, és mindkét koordinátatengelyt érinti.

a) $(2;9)$ $\boxed{(x-5)^2+(y-5)^2=25,\ (x-17)^2+(y-17)^2=289}$

b) $(6;3)$ $\boxed{(x-3)^2+(y-3)^2=9,\ (x-15)^2+(y-15)^2=225}$

c) $(4;2)$ $\boxed{(x-10)^2+(y-10)^2=100,\ (x-2)^2+(y-2)^2=4}$

26. Írjuk fel a kör egyenletét, ha adott a sugara (r), és két pontja (A és B)!

a) $r=\sqrt{20}$, $A(-2;4)$, $B(4;2)$ $\boxed{x^2+y^2=20,\ (x-2)^2+(y-6)^2=20}$

b) $r=5$, $A(4;-2)$, $B(5;-3)$ $\boxed{(x-8)^2+(y-1)^2=25,\ (x-1)^2+(y+6)^2=25}$

c) $r=\sqrt{10}$, $A(0;3)$, $B(2;5)$ $\boxed{(x-3)^2+(y-2)^2=10,\ (x+1)^2+(y-6)^2=10}$

27. Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amelynek átmérője a $k_1: x^2+y^2-8x-4y+11=0$ és a $k_2: x^2+y^2+4x+12y+4=0$ körök középpontjait összekötő szakasz. $\boxed{(x-1)^2+(y+2)^2=25}$

28. Határozzuk meg a következő három ponton áthaladó kör egyenletét!

a) $(-1;1)$, $(4;2)$, $(4;-4)$ $\boxed{(x-2)^2+(y+1)^2=13}$

b) $(8;5)$, $(2;7)$, $(10;-9)$ $\boxed{(x-2)^2+(y+3)^2=100}$

c) $(1;1)$, $(0;4)$, $(9;7)$ $\boxed{(x-5)^2+(y-4)^2=25}$

d) $(4;3)$, $(2;3)$, $(3;6)$ $\boxed{(x-3)^2+\left(y-\frac{13}{3}\right)^2=\frac{25}{9}}$

e) $(0;0)$, $(8;0)$, $(6;4)$ $\boxed{(x-4)^2+(y-0,5)^2=\frac{65}{4}}$

29. Számítsuk ki annak a húrnak a hosszát, amelyet az $x^2+y^2-14x-4y-5=0$ kör metsz ki a $2y-3x+12=0$ egyenesből. $\boxed{14,98}$

30. Határozzuk meg azokat a pontokat, amelyek az $x+2y=7$ egyenesre illeszkednek és a $(3;7)$ ponttól 5 egység távolságra vannak. $\boxed{P_1(-1;4),\ P_2(3;2)}$

31. Írjuk fel az $x^2+y^2=25$ kör $(4;3)$ pontjához tartozó érintőjének az egyenletét! $\boxed{4x+3y=25}$

32. Írjuk fel a k kör A pontjához tartozó érintőjének az egyenletét!

a) $k:(x-1)^2+(y-2)^2=25$, $A(5;5)$ $\boxed{4x+3y=35}$

b) $k: x^2+y^2-2x-3y=0$, $A(0;3)$ $\boxed{2x-3y+9=0}$