Deriválásos feladatok érettségin

Függvényelemzés (monotonitás, szélsőérték, inflexiós pont)

1. `(2006. május, 2. feladat)`

   Legyen adott az $f : [-2{,}5; 2{,}5] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x$ függvény.

   a) Határozza meg az f függvény zérushelyeit!

   $\boxed{-\sqrt{3},\ 0,\ \sqrt{3}}$

   b) Vizsgálja meg az f függvényt monotonitás szempontjából!

   $[-2{,}5; -1]$: növő; $[-1; 1]$: csökkenő; $[1; 2{,}5]$: növő

   c) Adja meg az f függvény legnagyobb és legkisebb értékét!

   $\boxed{-8{,}125;\ 8{,}125}$

2. `(2007. október, 6. feladat)`

   Adott az f függvény: $f :]-1; 6[\to \mathbb{R}$, $f(x) = -4x^3 + 192x$.

   a) Határozza meg f zérushelyeit, és elemezze az f függvényt monotonitás szempontjából!

   b) *(integrálszámításos feladat)*

3. `(2007. október, 7. feladat)`

   ...

   a) *(nem emelt szinű feladat)*

   b) *(nem emelt szinű feladat)*

   Jelölje x a csonkakúp két alapköre sugarának arányát és legyen $x > 1$. Bizonyítható, hogy a fentiekben leírt, közelítő számítás relatív hibáját százalékban mérve a következő függvény adja meg: $f :]-1; +\infty[\to \mathbb{R}$; $f(x) = 25 \cdot \frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}$

   c) Igazolja, hogy f-nek nincs szélsőértéke!

4. `(2008. május, 6. feladat)`

   a) Értelmezzük a valós számok halmazán az f függvényt az $f(x) = x^3 + kx^2 + 9x$ képlettel! (A k paraméter valós számot jelöl.)

   Számítsa ki, hogy k mely értéke esetén lesz $x = 1$ lokális szélsőérték-helye a függvénynek!

   $\boxed{k = -6}$

   Állapítsa meg, hogy az így kapott k esetén $x = 1$ a függvénynek lokális maximumhelye vagy lokális minimumhelye!

   $\boxed{\text{lokális maximum}}$

   Igazolja, hogy a k ezen értéke esetén a függvénynek van másik lokális szélsőérték-helye is!

   b) Határozza meg a valós számok halmazán a $g(x) = x^3 - 9x^2$ képlettel értelmezett g függvény inflexiós pontját!

   $\boxed{x = 3}$

5. `(2010. május, 6. feladat)`

   ...

   a) *(integrálszámításos feladat)*

   b) *(integrálszámításos feladat)*

   c) Az x mely pozitív valós értéke esetén lesz a $g(x) = -x^3 + x$ függvénynek lokális (helyi) maximuma?

   $\boxed{x = \frac{1}{\sqrt{3}}}$

6. `(2012. május, 4. feladat)`
Legyen p valós paraméter. Tekintsük a valós számok halmazán értelmezett f függvényt, amelynek hozzárendelési szabálya $f(x) = -3x^3 + (p-3)x^2 + p^2x - 6$.

a) *(integrálszámításos feladat)*

b) *(nem emelt szintű feladat)*

c) Határozza meg a p értékét úgy, hogy az f függvény deriváltja az $x = 1$ helyen pozitív legyen!

$p < -5$ vagy $3 < p$

7. `(2014. május, 4. feladat)`

a) Deriváltfüggvényének segítségével elemezze az $f :]-2;3[\to \mathbb{R};\ f(x) = x^3 - 1{,}5^2 - 6x$ függvényt a következő szempontok szerint: növekedés és fogyás, lokális szélsőértékek helye és értéke!

$]-2;-1[$-on nő, $[-1;2]$-on csökken,
$[2;3[$-on nő
$x = -1$ minimum $(3{,}5)$,
$x = 2$ maximum (-10)

b) *(integrálszámításos feladat)*

8. `(2015. május, 5. feladat)`
Adott az f és g függvény:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ f(x) = 2x + 1$$
$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ g(x) = x^2 - 2$$

a) *(nem emelt szintű feladat)*

b) *(integrálszámításos feladat)*

c) Számítással igazolja, hogy a $h :]-\infty; -0{,}5[\to \mathbb{R};\ h(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$ szigorúan monoton növekedő!

9. `(2015. október, 7. feladat)`
Adott az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ f(x) = x^4 + 8x^3 - 270x^2 + 275$ függvény.

a) Igazolja, hogy $x = -15$-ben abszolút minimuma, $x = 0$-ban lokális maximuma, $x = 9$-ben lokális minimuma van a függvénynek!

b) Igazolja, hogy f konkáv a $]-9;5[$ intervallumon!

c) *(integrálszámításos feladat)*

10. `(2017. október, 4. feladat)`
Adott a g függvény: $g(x) = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \quad (x \in \mathbb{R})$.

a) *(nem emelt szintű feladat)*

b) *(integrálszámításos feladat)*

c) Határozza meg az

$$f :]-4;-1[\to \mathbb{R},\ f(x) = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 12x + 20$$

függvény minimumhelyét és a minimális függvényértéket!

$x = -3$, érték: $-2{,}5$

11. (2018. október, 9. feladat)

a) *(integrálszámításos feladat)*

b) Határozza meg az a, b, c valós paraméterek értékét úgy, hogy az

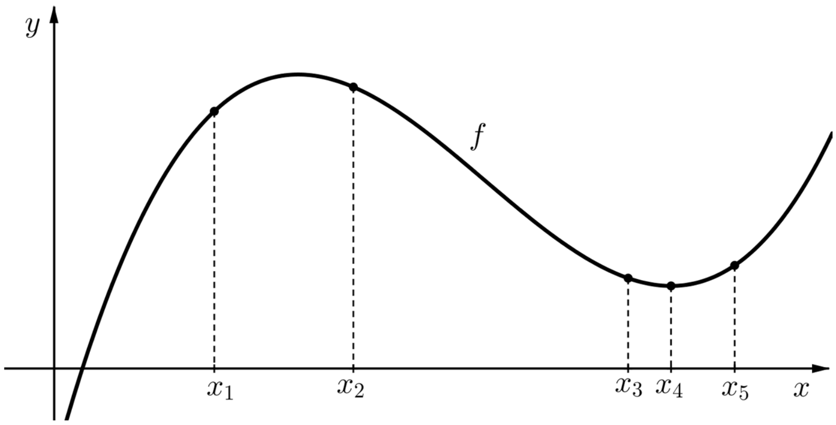
$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 28 \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvénynek $x = 2$-ben zérushelye, $x = -4$-ben lokális maximumhelye, $x = -1$-ben pedig inflexiós pontja legyen!

$\boxed{a = 1,\ b = 3,\ c = -24}$

12. (2019. október, 4. feladat)

a) Az ábrán a harmadfokú f függvény grafikonjának egy részlete látható. A függvény értelmezési tartományában megjelöltünk öt helyet.



Mindegyik esetben döntse el, hogy az adott helyen az f első, illetve második deriváltjának előjele pozitív (P) vagy negatív (N)! Válaszát írja a megadott táblázat megfelelő cellájába! (Tudjuk, hogy $f'(x_4) = 0$.)

hely	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
f' előjele	P			0	
f'' előjele					

$\boxed{PNN0P,\ NNPPP}$

b) *(nem emelt szintű feladat)*

Szöveges feladatra vonatkozó szélsőérték

13. (2010. október, 7. feladat)
Egy kozmetikumokat gyártó vállalkozás nagy tételben gyárt egyfajta krémet. A termelés teljes havi mennyisége (x kilogramm) 100 és 700 kg közé esik, amelyet egy megállapodás alapján a gyártás hónapjában el is adnak egy nagykereskedőnek. A megállapodás azt is tartalmazza, hogy egy kilogramm krém eladási ára: $(36 - 0{,}03x)$ euró.
A krémgyártással összefüggő havi kiadás (költség) is függ a havonta eladott mennyiségtől. A krémgyártással összefüggő összes havi kiadást (költséget) a $0{,}0001x^3 - 30{,}12x + 13000$ összefüggés adja meg, szintén euróban.

a) Számítsa ki, hogy hány kilogramm krém eladása esetén lesz az eladásból származó havi bevétel a legnagyobb! Mekkora a legnagyobb havi bevétel?

$\boxed{600\,\text{kg},\ 10\,800€}$

b) Adja meg a krémgyártásal elérhető legnagyobb havi nyereséget! Hány kilogramm krém értékesítése esetén valósul ez meg? *(nyereség=bevétel-kiadás)*

$\boxed{380\,\text{kg},\ 2306{,}4€}$

14. **(2011. május, 7. feladat)**
A nyomda egy plakátot 14 400 példányban állít elő. A költségeket csak a nyomtatáshoz felhasznált nyomólemezek (klisék) darabszámának változtatásával tudják befolyásolni. Egy nyomólemez 2500 Ft-ba kerül, és a nyomólemezek mindegyikével óránként 100 plakát készül el. A nyomólemezek árán felül, a lemezek számától függetlenül, minden nyomtatásra fordított munkaóra további 40 000 Ft költséget jelent a nyomdának. A ráfordított idő és az erre az időre jutó költség egyenesen arányos.

a) *(nem emelt szintű feladat)*

b) A 14 400 plakát kinyomtatását a nyomda a legkisebb költséggel akarja megoldani. Hány nyomólemezt kell ekkor használnia? Mennyi ebben az esetben a nyomólemezekre és a ráfordított munkaidőre jutó költségek összege?

48 nyomólemez, 240 000 Ft

15. **(2012. május, 7. feladat)**
Az $y = ax + b$ egyenletű egyenes illeszkedik a $(2;6)$ pontra. Tudjuk, hogy $a < 0$. Jelölje az x tengely és az egyenes metszéspontját P, az y tengely és az egyenes metszéspontját pedig Q. Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amelyre az OPQ háromszög területe a legkisebb, és számítsa ki ezt a területet (O a koordináta-rendszer origóját jelöli)!

$y = -3x + 12$; $T = 24$

16. **(2012. október, 7. feladat)**
Egy üzemben $4000\,\mathrm{cm}^3$-es, négyzet alapú, egyenes hasáb alakú, felül nyitott sütedények gyártását tervezik. Az edények külső felületét tűzálló zománcfestékkel vonják be. (A belső felülethez más anyagot használnak.)

a) *(nem emelt szintű feladat)*

b) Az üzemben végül úgy határozták meg az edények méretét, hogy a gyártásukhoz a lehető legkevesebb zománcfestékre legyen szükség. Számítsa ki a gyártott edények alapélének hosszát!

20 cm

c) *(nem emelt szintű feladat)*

17. **(2013. május, 7. feladat)**
Egy üzemben olyan forgáshenger alakú konzervdoboz gyártását szeretnék elkezdeni, amelynek térfogata $1000\,\mathrm{cm}^3$. A doboz aljának és tetejének anyagköltsége $0{,}2\,\mathrm{Ft/cm}^2$, míg oldalának anyagköltsége $0{,}1\,\mathrm{Ft/cm}^2$.

a) Mekkorák legyenek a konzervdoboz méretei (az alapkör sugara és a doboz magassága), ha a doboz anyagköltségét minimalizálni akarják?
Válaszát cm-ben, egy tizedes jegyre kerekítve adja meg!

$r \approx 4{,}3\,\mathrm{cm}$, $m \approx 17{,}2\,\mathrm{cm}$

Számítsa ki a minimális anyagköltséget is egész forintra kerekítve!

70 Ft

…

b) *(nem emelt szintű feladat)*

18. **(2013. október, 6. feladat)**
Egy teherszállító taxikat üzemeltető társaság egyik, elsősorban városi forgalomban alkalmazott kocsijának teljes működtetési költsége két részből tevődik össze:

- az üzemeltetési költség x km/h átlagsebesség esetén $400 + 0{,}8x$ forint kilométerenként;
- a gépkocsivezető alkalmazása 2200 Ft óránként.

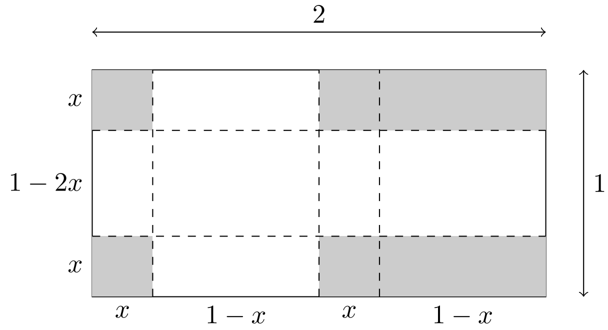
a) Mekkora átlagsebesség esetén minimális a kocsi kilométerenkénti működési költsége? Válaszát km/h-ban, egészre kerekítve adja meg!

52 km/h

b) *(integrálszámításos feladat)*

19. `(2014. október, 7. feladat)`

Egy üzemben egyforma, nagyméretű fémdobozok gyártását tervezik. A téglatest alakú doboz hálózatát egy $2\,\mathrm{m} \times 1\,\mathrm{m}$-es téglalapból vágják ki az ábrán látható módon. A kivágott idom felhajtott lapjait az élek mentén összeforrasztják. (A forrasztási eljárás nem jár anyagveszteséggel.)



a) Hogyan válasszák meg a doboz méreteit, hogy a térfogata maximális legyen? Válaszát centiméterben, egészre kerekítve adja meg!

21, 79, 58 cm

. . .

b) *(nem emelt szintű feladat)*

20. `(2016. május, 9. feladat)`

A repülőgépek üzemanyag-fogyasztását számos tényező befolyásolja. Egy leegyszerűsített matematikai modell szerint (a vizsgálatba bevont repülőgépek esetében) az egy óra repülés alatt felhasznált üzemanyag tömegét az $f(x) = \frac{1}{20}(x^2 - 1800x + 950\,000)$ összefüggés adja meg. Ebben az összefüggésben x a repülési átlagsebesség km/h-ban ($x > 0$), $f(x)$ pedig a felhasznált üzemanyag tömege kg-ban.

a) A modell alapján hány km/h átlagsebesség esetén lesz minimális az egy óra repülés alatt felhasznált üzemanyag tömege?

900 km/h

Mekkora ez a tömeg?

7000 kg

Egy repülőgép Londonból New Yorkba repül. A repülési távolság 5580 km.

b) Igazolja, hogy v km/h átlagsebesség esetén a repülőgép üzemanyag-felhasználása ezen a távolságon (a modell szerint)

$$279v - 502\,200 + \frac{265\,050\,000}{v}$$

kg lesz! ($v > 0$)

A vizsgálatba bevont, Londontól New Yorkig közlekedő repülőgépek v átlagsebességére teljesül, hogy $800\,\mathrm{km/h} \le v \le 1100\,\mathrm{km/h}$.

c) A megadott tartományban melyik átlagsebesség esetén a **legnagyobb**,

800 km/h

és melyik esetén a **legkisebb** az egy útra jutó üzemanyag-felhasználás?

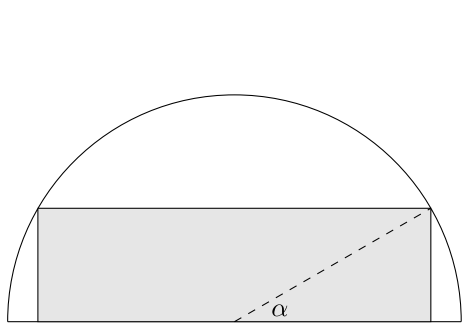
975 km/h

21. `(2016. október, 8. feladat)`

. . .

a) *(nem emelt szintű feladat)*

Egy várrom területén szabadtéri színházat alakítanak ki. A tervrajz szerint a téglalap alakú színpadot az egyik bástya félkör alakban elhelyezkedő falmaradványai közé helyeznék el. A bástya belső átmérője 12 méter. (Az ábrán a tervrajz egy részlete látható: O a félkör középpontja, a téglalap csúcsába vezető sugár és az átmérő közötti szög pedig α; $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.)



b) Hogyan kell megválasztani az α szöget, hogy a színpad területe a lehető legnagyobb legyen?

45°

Mekkora ez a legnagyobb terület?

$36\,\mathrm{m}^2$

22. (2017. május, 6. feladat)
Egy fémlemezből készült, forgáshenger alakú hordóban 200 ℓ víz fér el.

a) *(nem emelt szintű feladat)*

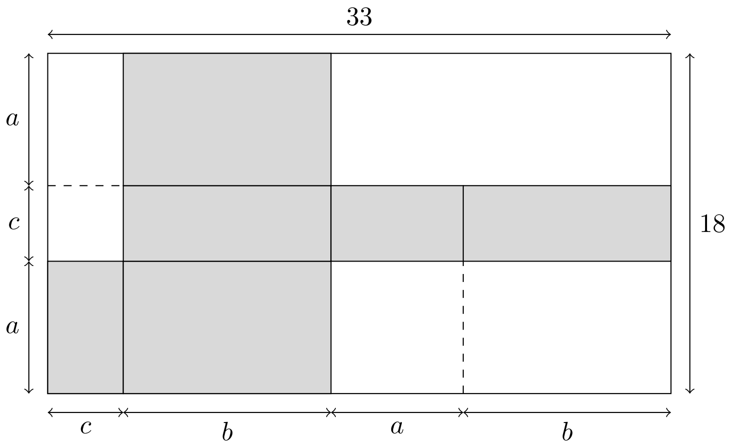
Egy kisvállalkozásnál több különböző méretben is gyártanak 200 literes, forgáshenger alakú lemezhordókat.

b) Mekkora annak a 200 liter térfogatú, **felül nyitott** forgáshengernek a sugara és magassága, amelynek a legkisebb a felszíne?

$r \approx 3{,}99$ dm, $m \approx 3{,}99$ dm

23. (2019. május, 5. feladat)

Egy 33×18 cm-es kartonlapból (kivágással, hajtogatással) téglatest alakú dobozt készítenek. A doboz (sötétre színezett) kiterített hálóját és méreteit az *ábra* szerint választják meg.



a) *(nem emelt szintű feladat)*

b) Hogyan kell megválasztani az a, b és c élek hosszát ahhoz, hogy a doboz térfogata maximális legyen?

$a = 5$ cm
$b = 10$ cm
$c = 8$ cm

...

c) *(nem emelt szintű feladat)*

Érintő szerkesztése

24. (2007. május, 4. feladat)

a) *(nem emelt szintű feladat)*

b) Adja meg az $y = x^2 - 8x + 11$ egyenlettel megadott alakzat $P(5; -4)$ pontjában húzott érintőjének egyenletét!

$y = 2x - 14$

25. (2014. október, 4. feladat)
Adott a síkbeli derékszögű koordináta-rendszerben az $y = 3x^2 - x^3$ egyenletű görbe.

a) *(nem emelt szintű feladat)*

b) Írja fel a görbe 3 abszcisszájú pontjában húzható érintőjének egyenletét! (abszcissza: első koordinátaÁ)

$y = -9x + 27$

c) *(integrálszámításos feladat)*

26. (2017. május, 4. feladat)
Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 12x + 27$ függvény grafikonja a derékszögű koordináta-rendszerben parabola.

a) *(integrálszámításos feladat)*

b) Írja fel a parabolához az $E(5; -8)$ pontjában húzható érintő egyenletét!

$y = -2x + 2$

c) *(nem emelt szintű feladat)*