Skatulya-elv

1. Egy iskolába 367 diák jár. Mutassuk meg, hogy van legalább két diák, akik azonos napon ünneplik a születésnapjukat!
2. Hét ember egyszerre vásárol egy boltban. Bizonyítsuk be, hogy közülük legalább kettőnek azonos számú ismerősük van a többiek közül!
3. Egy osztály 31 tanulója megírta a matematika dolgozatot, amelyet 1-5 jegyekkel értékeltek. Bizonyítandó, hogy van legalább 7 olyan tanuló, akik ugyanolyan jegyet kaptak.
4. Adott 4 természetes szám. Bizonyítsuk be, hogy közülük legalább kettő azonos maradékot ad 3-mal osztva!
5. Adott n darab természetes szám. Bizonyítsuk be, hogy közülük legalább kettő azonos maradékot ad $n-1$-gyel osztva!
6. Adott hat természetes szám. Bizonyítsuk be, hogy található köztük kettő, melynek különbsége osztható öttel!
7. Bizonyítsuk be, hogy 502 természetes szám között mindig található kettő, melyek összege vagy különbsége osztható ezerrel.
8. Bizonyítsuk be, hogy három négyzetszám között mindig van kettő, amelyek különbsége osztható 3-mal!
9. Bizonyítsuk be, hogy három négyzetszám között mindig van kettő, amelyek különbsége osztható 4-gyel!
10. Bizonyítsuk be, hogy öt 10-nél nagyobb prímszám között mindig van kettő, amelyek különbsége osztható 10-zel!
11. Bizonyítsuk be, hogy hét négyzetszám között mindig van kettő, amelyek különbsége osztható tízzel!
12. Egy 7 cm oldalhosszúságú négyzeten adott 50 pont. Bizonyítsuk be, hogy található két olyan pont, melyek távolsága legfeljebb 1,5 cm!
13. Egy 5 dm oldalú, négyzet alakú céltáblára 30 lövés érkezik. Mutassuk meg, hogy biztosan van két lövés, amelyek távolsága legfeljebb 1,5 dm!
14. Egy 6 dm oldalú, négyzet alakú táblára 10 lövés érkezik. Mutassuk meg, hogy biztosan van két lövés, amelyek távolsága legfeljebb 3 dm.
15. Egy 40 cm oldalú, szabályos hatszög alakú céltáblára 7 lövés érkezik. Mutassuk meg, hogy van közöttük legalább két olyan, amelyek egymástól mért távolsága nem nagyobb 40 cm-nél.
16. Az 1 egység oldalú négyzetbe helyezzünk el 30 pontot. Igaz-e, hogy mindig található a pontok között 4 olyan, hogy ezek egy 0,25 sugarú körlappal lefedhetőek?
17. Adott a síkon 18 egyenes úgy, hogy nincs köztük két párhuzamos. Bizonyítsuk be, hogy mindig van köztük kettő, amelyek által bezárt szög legfeljebb $10°$.
18. Egy $5\,\mathrm{m} \times 6\,\mathrm{m} \times 3\,\mathrm{m}$-es teremben 100 légy röpköd. Igaz-e, hogy mindig van köztük kettő, melyek egymástól való távolsága 2 m-nél kisebb?
19. Bizonyítsuk be, hogy bárhogyan is adunk meg 5 rácspontot a síkon, mindig ki tudunk választani kettőt, melyeknek felezőpontja is rácspont.
20. Vegyük azt a négyzetet, melynek két átellenes sarka $(-2017; -2017)$ és $(2017; 2017)$. Erre a „céltáblára" leadunk $(2 \cdot 2017)^2 + 1$ lövést. Bizonyítandó, hogy a lövésnyomok között biztosan lesz három olyan, amelyek által meghatározott háromszög területe nem nagyobb $\frac{1}{2}$-nél.
21. Legyen p, q és r három egész szám! Bizonyítsuk be, hogy a $pqr(p-q)(q-r)(r-p)$ szorzat osztható hattal!
22. Tekintsünk egy legfeljebb kétjegyű pozitív egész számokból álló 10 elemű halmazt. Bizonyítsuk be, hogy ennek a halmaznak található két diszjunkt részhalmaza, amelyekben az elemek összege egyenlő!
23. Előfordulhat-e egy naptári évben, hogy egyetlen vasárnap sem esik hetedikére?
24. A Hupikék Törpikék 1001×945 méteres erdejében 1280 darab 1 méter átmérőjű fenyőfa él. A törpök szeretnének 7 darab, 20×34 méteres teniszpályát kijelölni az erdőben. Lehetséges-e ez anélkül, hogy egyetlen fenyőt is ki kellene vágniuk?

25. Tekintsünk egy legfeljebb kétjegyű pozitív egész számokból álló 10 elemű halmazt. Bizonyítsuk be, hogy ennek a halmaznak mindig van két olyan közös elem nélküli részhalmaza, amelyekben az elemek összege egyenlő!

26. Adott öt pont egy gömb felületén. Bizonyítsuk be, hogy van olyan zárt félgömbfelület, amely e pontok közül legalább négyet tartalmaz.

27. Egy kör kerületére kilenc egész számot írunk, amelyek összege 90. Bizonyítsuk be, hogy van négy egymás melletti szám, amelyek összege legalább 40.

28. Egy egységnyi oldalú négyzet belsejében elhelyeztünk 9 pontot. Bizonyítsuk be, hogy a pontok által meghatározott háromszögek között van legalább kettő, amelynek területe $\frac{1}{8}$-nál kisebb.

29. Adott 10 olyan különböző 2-hatvány, amelyek mindegyikében a 2 kitevője egy 100-nál kisebb pozitív egész szám. Igazoljuk, hogy biztosan ki lehet közülük választani néhányat (esetleg az összeset) úgy, hogy a kiválasztott számok két olyan csoportba oszthatók, amelyekben a számok szorzata ugyanannyi. (Ha valamelyik csoportba csak egyetlen szám kerül, akkor abban a csoportban szorzat értéke maga a szám.)

30. 121 darab pozitív egész számról tudjuk, hogy összegük 360. Bizonyítsuk be, hogy az adott 121 darab pozitív egész szám közül ki lehet néhányat választani úgy, hogy a kiválasztott számok összege 120 legyen.

31. A $2^1; 2^2; 2^3; \dots; 2^{50}$ sorozatban található-e két olyan különböző szám, amelyek különbsége osztható százzal?

32. Egy összejövetelen 31 ember vett részt. Közülük bármely 15-höz van a társaságnak egy további tagja, aki mindegyiküket ismeri. Bizonyítandó, hogy van olyan tagja a társaságnak, aki a résztvevők mindegyikét ismeri. (Az ismeretségek kölcsönösek.)

15+16 fős csoport, 16 fős csoportból menjen át a másik csoportba az, aki mindenkit ismer onnan.
Ezután ismét.
Ha lesz valaki, aki kétszer cserél termet, mindenkit ismer.

33. Egy 30 fős osztály diákjai közül a tanév során 16 alkalommal 8-8 diák ment kirándulni egy mikrobusszal. Mutassuk meg, hogy az osztályban van két olyan diák, akik legalább kétszer együtt kirándultak.

Van olyan diák, aki legalább ötször kirándult.

34. Adott nyolc háromjegyű szám, amelyeket kettesével egymás mellé írva hatjegyű számokat készítünk az összes lehetséges módon. Azt tapasztaljuk, hogy minden esetben találunk 7-tel osztható hatjegyű számot. Miért?

35. Egy zsákban 2013 korong van, megszámozva 1-től 2013-ig. Hányat kell közülük visszatevés nélkül kihúznunk, hogy biztosan legyen köztük két olyan szám, amelyek összege osztható 7-tel?

36. Egy 9 tagú társaságból mindenki k társának küld újévi üdvözlőlapot. Határozzuk meg k legkisebb értékét úgy, hogy biztosan legyen olyan pár, akik kölcsönösen üdvözlik egymást.

37. Párokba lehet-e rendezni 1-től 50-ig az egész számokat úgy, hogy minden párban a számok összege más-más prímszám legyen?

38. Legfeljebb hány prímet lehet megadni úgy, hogy közülük bármely három összege is prím legyen?

39. Adott 4999 különböző egész szám, az egyik a 42. Igazoljuk, hogy kiválasztható közülük néhány, amelyek összege osztható 5000-rel.

Vizsgáljuk az $s_j = \sum_{i=1}^{j} a_i$ összegeket!